Cette dernière formule a été appliquée par M. GÜNTHER, à la résolution de l'équation indéterminée

$$y^2 - Qx^2 = Kz,$$

en nombres entiers*; il est facile de voir qu'un très-grand nombre de formules de cette section et des suivantes, conduisent à des conséquences analogues, mais beaucoup plus générales.

SECTION VI.

Développement des fonctions U_n et V_n en séries de fractions.

Les formules (30) donnent lieu aux développements de $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ et $\frac{V_{n+1}}{V_n}$ en séries dont les termes ont pour dénominateurs le produit de deux termes consécutifs des séries U et V. On a, en effet,

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{U_2}{U_1} + \left(\frac{U_3}{U_2} - \frac{U_2}{U_1}\right) + \left(\frac{U_4}{U_3} - \frac{U_3}{U_2}\right) \ldots + + \left(\frac{U_{n+1}}{U_n} - \frac{U_n}{U_{n-1}}\right),$$

et, en réunissant les fractions contenues dans chaque parenthèse,

$$(35) \qquad \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{U_2}{U_1} - \frac{Q}{U_1 U_2} - \frac{Q^2}{U_2 U_3} - \frac{Q^3}{U_3 U_4} - \ldots - \frac{Q_{n-1}}{U_{n-1} U_n};$$

on a ainsi dans la série de FIBONACCI, pour n augmentant indéfiniment

$$(36) \qquad \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1.1} - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.8} - \frac{1}{8.13} + \ldots$$

En suivant la même voie, on obtient les formules plus générales

$$(37) \qquad \frac{U_{(n+1)r}}{U_{nr}} = \frac{U_{2r}}{U_r} - \left[\frac{Q^r}{U_r U_{2r}} + \frac{Q^{2r}}{U_{2r} U_{3r}} + \ldots + \frac{Q^{(n-1)r}}{U_{(n-1)r} U_{nr}}\right] U_r^2,$$

et

$$(38) \qquad \frac{V_{(n+1)r}}{V_{nr}} = \frac{V_r}{V_0} - \left[\frac{Q^r}{V_0 V_r} + \frac{Q^{2r}}{V_r V_{2r}} + \ldots + \frac{Q^{nr}}{V_{(n-1)r} V_{nr}}\right] \Delta U_r^2.$$

On tire encore des deux relations

$$(39) \qquad \begin{cases} U_{n+r} V_n - U_n V_{n+r} = 2Q^n U_r, \\ V_{n+r} V_n - \Delta U_n U_{n+r} = 2Q^n V_r, \end{cases}$$

* *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, de M. RESAL, pag. 331–341; Octobre, 1876.

que nous démontrerons plus loin, les développements

$$(40)\quad \begin{cases} \dfrac{U^{n+kr}}{V_{n+kr}} = \dfrac{U_n}{V_n} + 2Q^n U_r \left[\dfrac{1}{V_r V_{n+r}} + \dfrac{Q^r}{V_{n+r} V_{n+2r}} + \dots + \dfrac{Q^{(k-1)r}}{V_{n+(k-1)r} V_{n+kr}}\right], \\ \dfrac{V_{n+kr}}{U_{n+kr}} = \dfrac{V_n}{U_n} - 2Q^n U_r \left[\dfrac{1}{U_r U_{n+r}} + \dfrac{Q^r}{U_{n+r} U_{n+2r}} + \dots + \dfrac{Q^{(k-1)r}}{U_{n+(k-1)r} U_{n+kr}}\right]. \end{cases}$$

Lorsque k augmente indéfiniment, les premiers membres des égalités précédentes ont respectivement pour limites $\dfrac{1}{\sqrt{\Delta}}$ et $\sqrt{\Delta}$; on tiendra compte dans le second membre, des conditions de convergence.

On peut ainsi développer la racine carrée d'un nombre entier en séries de fractions ayant pour numérateur l'unité; c'était un usage familier aux savants de la Grèce et de l'Egypte; ainsi, par exemple, cette valeur approximative de

$$\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \varepsilon,$$

rapportée par COLUMELLE au chapitre V de son ouvrage *de Rê Rusticâ;* ainsi encore, cette valeur approximative de

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{12.34} + \varepsilon,$$

donnée par les auteurs indiens BAUDHAYANA et APASTAMBA*; cette valeur approximative est égale au rapport des termes $V_8 = 577$ et $U_8 = 408$, de la série de PELL.

SECTION VII.

Des relations des fonctions U_n et V_n avec la théorie de la divisibilité.

Si nous posons $\alpha = a^r$ et $\beta = b^r$, et, par suite, $\alpha\beta = Q^r$, nous obtenons, par la formule qui donne le quotient de $\alpha^n - \beta^n$ par $\alpha - \beta$, les résultats suivants:

1°. Lorsque n désigne un nombre *pair :*

$$(41)\qquad \frac{U_{nr}}{U_r} = V_{(n-1)r} + Q^r V_{(n-3)r} + Q^{2r} V_{(n-5)r} + \dots + Q^{\left(\frac{n}{2}-1\right)r} V_r;$$

2°. Lorsque n désigne un nombre *impair :*

$$(42)\qquad \frac{U_{nr}}{U_r} = V_{(n-1)r} + Q^r V_{(n-3)r} + Q^{2r} V_{(n-5)r} + \dots + Q^{\frac{n-1}{2}r}.$$

* *The Çulvasûtras* by G. THIBAUT, pag. 13–15. *Journal of the Asiatic Society of Bengal,* 1875.

Le quotient de $\alpha^n - \beta^n$ par $\alpha + \beta$, lorsque n désigne un nombre *pair*, donne encore

$$(43)\qquad \frac{U_{nr}}{V_r} = U_{(n-1)r} - Q^r U_{(n-3)r} + Q^{2r} U_{(n-5)r} - \ldots + (-Q^r)^{\frac{n}{2}-1} U_r ,$$

et le quotient de $\alpha^n + \beta^n$ par $\alpha + \beta$, lorsque n désigne un nombre *impair*, donne enfin

$$(44)\qquad \frac{V_{nr}}{V_r} = V_{(n-1)r} - Q^r V_{(n-3)r} + Q^{2r} V_{(n-5)r} - \ldots + (-Q^r)^{\frac{n-1}{2}} .$$

Pour $n = 2$, on retrouve la formule

$$(3)\qquad U_{2r} = U_r V_r ,$$

et, pour $n = 3$, on a

$$(45)\qquad \begin{cases} U_{3r} = U_r\,(V_{2r} + Q^r) , \\ V_{3r} = V_r\,(V_{2r} - Q^r) . \end{cases}$$

Les relations précédentes nous montrent que U_m est toujours divisible par U_n, lorsque m est divisible par n; de même V_m est toujours divisible par V_n, lorsque m est impair et divisible par n; par conséquent U_m et V_m ne peuvent être des nombres premiers, que si m est premier; mais la réciproque de ce théorème n'a pas lieu.

Dans la série de FIBONACCI, u_3 est divisible par 2, u_4 est divisible par 3, u_5 est divisible par 5; par conséquent, u_{3n}, u_{4n} et u_{5n} sont respectivement divisibles par 2, 3, et 5. Ainsi encore, bien que 53 soit premier on a

$$u_{53} = 953 \times 559\,45741.$$

Reprenons les égalités

$$(6)\qquad V_n + \delta U_n = 2a^n,\quad V_n - \delta U_n = 2b^n;$$

nous obtenons, en multipliant membre à membre, la relation

$$(46)\qquad V_n^2 - \Delta U_n^2 = 4Q^n,$$

qui correspond, en trigonométrie, à la formule

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

Cette relation nous montre que si U_n et V_n admettaient un diviseur commun θ, ce diviseur serait un facteur de Q; mais, d'autre part,

$$V_n = \left(\frac{P+\delta}{2}\right)^n + \left(\frac{P-\delta}{2}\right)^n ,$$

et, en supprimant les multiples de Q, ce qui revient évidemment à remplacer δ par Q, on a la congruence.

$$(47)\qquad V_n \equiv P^n ,\qquad (\text{Mod. } Q) ;$$

donc, tout diviseur θ de U_n et V_n diviserait P et Q; or nous avons supposé premiers entre eux. De là résulte cette proposition:

THÉORÈME: *Les nombres* U_n et V_n *sont premiers entre eux.*

Si l'on désigne par μ l'exposant auquel appartient P suivant le module Q, on sait que la congruence

$$P^n \equiv 1, \qquad (\text{Mod. } Q),$$

est vérifiée pour toutes les valeurs de n égales à un multiple quelconque de μ, μ étant lui-même un certain diviseur de l'indicateur $\phi(Q)$ de Q, ou du nombre des entiers inférieurs et premiers à Q; par conséquent, à cause de l'égalité (47), on résoudra la congruence

(48) $$V_n \equiv 1, \qquad (\text{Mod. } Q),$$

par toutes les valeurs de n égales à un multiple quelconque de μ.

SECTION VIII.

Des formes linéaires et quadratiques des diviseurs de U_n *et* V_n, *qui correspondent aux valeurs paires et impaires de l'argument* n.

La formule (46) conduit encore à d'autres conséquences importantes sur la forme des diviseurs de U_n et de V_n, car on en déduit immédiatement les propositions suivantes, suivant que l'on considère n égal à un nombre *pair*, ou à un nombre *impair*.

THÉORÈME: *Les termes de rang impair de la série* U_n *sont des diviseurs de la forme quadratique* $x^2 - Qy^2$.

En tenant compte des résultats bien connus de la théorie des diviseurs des formes quadratiques, on a, en particulier, pour les formes linéaires correspondantes des diviseurs premiers impairs de U_{2r+1}

dans la série de FIBONACCI: $4q + 1$;
" " FERMAT: $8q + 1, 7$;
" " PELL: $4q + 1$.

Ainsi, les termes de rang impair de la série de FIBONACCI ou de la série de PELL ne peuvent contenir comme diviseur aucun nombre premier de la forme $4q + 3$.

THÉORÈME: *Les termes de rang pair de la série* V_n *sont des diviseurs de la forme quadratique* $x^2 + \Delta y^2$.

En particulier, les formes linéaires correspondantes des diviseurs premiers impairs de V_{2r} sont

dans la série de FIBONACCI : $20q + 1, 3, 7, 9$;
" " FERMAT : $4q + 1$;
" " PELL : $8q + 1, 3$.

THÉORÈME : *Les termes de rang impair de la série V_n sont des diviseurs de la forme quadratique $x^2 + Q\Delta y^2$.*

En particulier, les formes linéaires correspondantes des diviseurs premiers impairs de V_{2r+1} sont

dans la série de FIBONACCI : $20q + 1, 9, 11, 19$;
" " FERMAT : $8q + 1, 3$;
" " PELL : $8q + 1, 7$.

SECTION IX.

Des formules concernant l'addition des fonctions numériques.

En multipliant membre à membre les relations

$$V_m + \delta U_m = 2a^m, \qquad V_n + \delta U_n = 2a^n,$$

on obtient,

$$V_m V_n + \Delta U_m U_n + \delta [U_m V_n + U_n V_m] = 4a^{m+n};$$

si l'on change a en b, et δ en $-\delta$, on déduit ensuite par addition et par soustraction, les formules

$$(49) \quad \begin{cases} 2U_{m+n} = U_m V_n + U_n V_m, \\ 2V_{m+n} = V_m V_n + \Delta U_m U_n, \end{cases}$$

auxquelles correspondent en trigonométrie les formules de l'addition des arcs :

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x,$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Si nous changeons n en $-n$ dans les formules (49), en tenant compte des relations

$$(50) \qquad U_{-n} = -\frac{U_n}{Q^n}, \qquad V_{-n} = \frac{V_n}{Q^n},$$

nous obtenons

$$(51) \quad \begin{cases} 2Q^n U_{m-n} = U_m V_n - U_n V_m, \\ 2Q^n V_{m-n} = V_m V_n - \Delta U_m U_n; \end{cases}$$

en faisant $m = n + r$, on obtient les formules (39) données plus haut.

La comparaison des égalités (49) et (51) nous donne immédiatement

$$U_{m+n} + Q^n U_{m-n} = U_m V_n,$$
$$U_{m+n} - Q^n U_{m-n} = U_n V_m;$$

posons maintenant

$$m + n = r, \quad m - n = S,$$

il vient

$$(52) \quad \begin{cases} U_r + Q^{\frac{r-s}{2}} U_s = U_{\frac{r+s}{2}} V_{\frac{r-s}{2}}, \\ U_r - Q^{\frac{r-s}{2}} U_s = U_{\frac{r-s}{2}} V_{\frac{r+s}{2}}; \end{cases}$$

ces relations sont entièrement semblables à celles qui permettent de transformer la somme ou la différence de deux lignes trigonométriques, en un produit. On a, de même

$$(53) \quad \begin{cases} V_r + Q^{\frac{r-s}{2}} V_s = V_{\frac{r+s}{2}} V_{\frac{r-s}{2}}, \\ V_r - Q^{\frac{r-s}{2}} V_s = \Delta\, U_{\frac{r+s}{2}} U_{\frac{r-s}{2}}. \end{cases}$$

On aura encore, comme pour la somme des sinus ou des cosinus d'arcs en progression arithmétique

$$(54) \quad \begin{cases} U_m + Q^{\frac{-r}{2}} U_{m+r} + Q^{\frac{-2r}{2}} U_{m+2r} + \ldots + Q^{\frac{-nr}{2}} U_{m+nr} = U_{\frac{2m+nr}{2}} \dfrac{U_{\frac{n+1}{2}r} Q^{\frac{m}{4}}}{U_{\frac{r}{2}} Q^{\frac{nr}{2}}}, \\ V_m + Q^{\frac{-r}{2}} V_{m+r} + Q^{\frac{-2r}{2}} V_{m+2r} + \ldots + Q^{\frac{-nr}{2}} V_{m+nr} = V_{\frac{2m+nr}{2}} \dfrac{U_{\frac{n+1}{2}r} Q^{\frac{m}{1}}}{U_{\frac{r}{2}} Q^{\frac{nr}{2}}}; \end{cases}$$

et, par suite

$$(55) \quad \frac{U_m + Q^{\frac{-r}{2}} U_{m+r} + Q^{\frac{-2r}{2}} U_{m+2r} + \ldots + Q^{\frac{-nr}{2}} U_{m+nr}}{V_m + Q^{\frac{-r}{2}} V_{m+r} + Q^{\frac{-2r}{2}} V_{m+2r} + \ldots + Q^{\frac{-nr}{2}} V_{m+nr}} = \frac{U_{m+\frac{n}{2}r}}{V_{m+\frac{n}{2}r}}.$$

On trouve des formules beaucoup plus simples en partant des relations

$$(13) \quad \begin{cases} U_{n+2r} = V_r U_{n+r} - Q^r U_n, \\ V_r V_{n+2r} = V_r V_{n+r} - Q^r V_n; \end{cases}$$

si l'on remplace successivement n par $0, r, 2r, \ldots (n-1)r$, et si l'on ajoute, on obtient

$$(56) \quad \begin{cases} U_r + U_{2r} + \ldots + U_{nr} = \dfrac{U_r + Q^n U_{nr} - U_{(n+1)r}}{1 + Q^r - V_r}, \\ V_r + V_{2r} + \ldots + V_{nr} = \dfrac{V_r + Q^n V_{nr} - V_{(n+1)r}}{1 + Q^r - V_r}. \end{cases}$$

Ces formules se présentent sous une forme indéterminée lorsque le dénominateur s'annule, c'est-à-dire pour

$$1 + a^r b^r - a^r - b^r = 0\,,$$

ou bien

$$(1 - a^r)(1 - b^r) = 0\,;$$

c'est-à-dire pour les valeurs de a ou de b égales à l'unité; dans ce cas, on emploie le procédé de sommation de la progression géometrique. On a d'ailleurs, dans la série de FIBONACCI, pour $r = 1$ et $r = 2$,

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n &= u_{n+2} - 1, \\ u_2 + u_4 + u_6 + \ldots\ldots + u_{2n} &= u_{2n+1} - 1, \\ v_1 + v_2 + v_3 + \ldots\ldots + v_n &= v_{n+2} - 3, \\ v_2 + v_4 + v_6 + \ldots\ldots + v_{2n} &= v_{2n+1} - 1. \end{aligned}$$

On trouvera encore plus généralement,

$$(57)\quad U_{m+r} + U_{m+2r} + U_{m+3r} + \ldots + U_{m+nr} = \frac{U_{m+r} + Q^r U_{m+nr} - U_{m+(n+1)r} - Q^r U_m}{1 + Q^r - V_r},$$

et un résultat analogue en changeant U en V.

La formule d'addition peut s'écrire encore

$$2\,\frac{U_{m+n}}{U_n} = \frac{U_m}{U_n} V_n + V_m\,;$$

on a, par conséquent

$$(58)\quad 2\,\frac{U_{m+n}\,U_{m+n-1}\ldots\ldots U_{m+1}}{U_n\;\;U_{n-1}\ldots\ldots\ldots U_1} = \frac{U_{m+n-1}\,U_{m+n-2}\ldots\ldots U_m}{U_n\;\;U_{n-1}\ldots\ldots\ldots U_1} V_n + \frac{U_{m+n-1}\,U_{m+n-2}\ldots\ldots U_{m+1}}{U_{n-1}\;\;U_{n-2}\ldots\ldots\ldots U_1} V_m\,.$$

On en déduit immédiatement cette proposition:

THÉORÈME: *Le produit de n termes consécutifs de la série* U_n *est divisible par le produit des n premiers termes.*

Nous terminerons ce paragraphe par la démonstration de formules d'une extrême importance; car elles nous serviront ultérieurement comme base de la théorie des fonctions numériques doublement périodiques, déduites de la considération des fonctions symétriques des racines des équations du troisième et du quatrième degré à coefficients commensurables. Les formules (30) nous donnent

$$\begin{aligned} U_{m-1}\,U_{m+1} &= U_m^2 - {}^{m-1}Q\,, \\ U_{n-1}\,U_{n+1} &= U_n^2 - {}^{n-1}Q\,; \end{aligned}$$

on en déduit

$$U_n^2 U_{m-1} U_{m+1} - U_m^2 U_{n-1} U_{n+1} = Q^{n-1}[U_m^2 - Q^{m-n} U_n^2],$$

et, par les formules (32)

$$(A) \qquad U_n^2 U_{m-1} U_{m+1} - U_m^2 U_{n-1} U_{n+1} = Q^{n-1} U_{m-n} U_{m+n};$$

on a, de même

$$(A') \qquad V_n^2 V_{m-1} V_{m+1} - V_m^2 V_{n-1} V_{n+1} = -\Delta Q^{n-1} V_{m-n} V_{m+n}.$$

En particulier, pour $m = n + 1$, et pour $m = n + 2$, on a

$$(B) \quad \begin{cases} U_n^3 U_{n+2} - U_{n+1}^3 U_{n-1} = Q^{n-1} U_1 U_{2n+1}, \\ U_n^2 U_{n+1} U_{n+3} - U_{n+2}^2 U_{n-1} U_{n+1} = Q^{n-1} U_2 U_{2n+2}, \end{cases}$$

et des formules analogues pour les V_n.

Les formules (A) et (B) appartiennent à la théorie des fonctions elliptiques, et, plus spécialement, aux fonctions que JACOBI a désignées par les symboles Θ et H.

SECTION X.

De la somme des carrés des fonctions numériques U_n et V_n.

Si dans la relation suivante

$$(59) \qquad \Delta U_{r+2\kappa\rho} U_{s+2\kappa\sigma} = V_{r+s+2\kappa(\rho+\sigma)} - Q^{s+2\kappa\sigma} V_{r-s+2\kappa(\rho-\sigma)},$$

nous supposons successivement κ égal à 0, 1, 2, 3, ... n, et si nous ajoutons membre à membre les égalités obtenues, après avoir divisé respectivement par

$$1, \quad Q^{\rho+\sigma}, \quad Q^{2(\rho+\sigma)}, \ldots . \; Q^{n(\rho+\sigma)}, \ldots$$

nous obtenons la formule

$$(60) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\kappa=0}^{\kappa=n} U_{r+2\kappa\rho} U_{s+2\kappa\sigma} = \frac{U_{r+2n\rho} U_{s+(2n+1)\sigma} - Q^{\sigma-\rho} U_{r+(2n+1)\rho} U_{s+2n\sigma}}{\Delta Q^{n(\rho+\sigma)} U_{\sigma-\rho} U_{\sigma+\rho}} \\ \qquad\qquad + \dfrac{U_r U_{s-2\sigma} - Q^{\sigma-\rho} U_{r-2\rho} U_s}{\Delta U_{\sigma-\rho} U_{\sigma+\rho}}. \end{cases}$$

On a, en particulier, pour $2\rho = r$ et $2\sigma = s$,

$$(61) \quad \begin{cases} U_r U_s + \dfrac{U_{2r} U_{2s}}{Q^{\frac{r+s}{2}}} + \dfrac{U_{3r} U_{3s}}{Q^{r+s}} + \ldots + \dfrac{U_{(n+1)r} U_{(n+1)s}}{Q^{\frac{n}{2}(r+s)}} \\ \qquad = \dfrac{U_{(n+1)r} U_{2(n+1)s} - Q^{\frac{s-r}{2}} U_{(n+1)s} U_{2(n+1)r}}{\Delta Q^{\frac{n}{2}(r+s)} U_{\frac{s-r}{2}} U_{\frac{s+r}{2}}}, \end{cases}$$

et, plus particuliérement encore

$$(62)\quad \begin{cases} \dfrac{U_r^2}{Q^r}+\dfrac{U_{2r}^2}{Q^{2r}}+\dfrac{U_{3r}^2}{Q^{3r}}+\ldots+\dfrac{U_{(n+1)r}^2}{Q^{(n+1)r}}=\dfrac{1}{\Delta}\left[\dfrac{U_{(2n+3)r}}{U_rQ^{(n+1)r}}-2n-3\right], \\[2ex] \dfrac{U_r^2}{Q^r}+\dfrac{U_{3r}^2}{Q^{3r}}+\dfrac{U_{5r}^2}{Q^{5r}}+\ldots+\dfrac{U_{(2n+1)r}^2}{Q^{(2n+1)r}}=\dfrac{1}{\Delta}\left[\dfrac{U_{4(n+1)r}}{U_{2r}Q^{(2n+1)r}}-2n-2\right]. \end{cases}$$

Par un procédé analogue, on trouvera aussi les valeurs de

$$\sum_{\kappa=0}^{\kappa=n}\frac{V_{r+2\kappa\rho}V_{s+2\kappa\sigma}}{Q^{\kappa(\rho+\sigma)}} \text{ et de } \sum_{\kappa=0}^{\kappa=n}\frac{U_{r+2\kappa\rho}V_{s+2\kappa\sigma}}{Q^{\kappa(\rho+\sigma)}}.$$

En particulier

$$(63)\quad \begin{cases} \dfrac{V_r^2}{Q^r}+\dfrac{V_{2r}^2}{Q^{2r}}+\dfrac{V_{3r}^2}{Q^{3r}}+\ldots+\dfrac{V_{nr}^2}{Q^{nr}}=2n-1+\dfrac{U_{(2n+1)r}}{U^rQ^{nr}}, \\[2ex] \dfrac{V_r^2}{Q^r}+\dfrac{V_{3r}^2}{Q^{3r}}+\dfrac{V_{5r}^2}{Q^{5r}}+\ldots+\dfrac{V_{(2n+1)r}^2}{Q^{(2n+1)r}}=2n+2+\dfrac{U_{4(n+1)r}}{U_rQ^{2n+1)r}}. \end{cases}$$

On a aussi, dans le cas général,

$$(64)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\kappa=0}^{\kappa=n}U_{m+\kappa r}^2=\frac{V_{2m+2(n+1)r}-V_{2m}-Q^{2r}[V_{2m+2nr}-V_{2m-2r}]}{\Delta(V_{2r}-Q^{2r}-1)}-2Q^m\frac{Q^{(n+1)r}-1}{\Delta(Q^r-1)} \\[2ex] \displaystyle\sum_{\kappa=0}^{\kappa=n}V_{m+\kappa r}^2=\frac{V_{2m+2(n+1)r}-V_{2m}-Q^{2r}[V_{2m+2nr}-V_{2m-2r}]}{V_{2r}-Q_{2r}-1}+2Q^m\frac{Q^{(n+1)r}-1}{Q^r-1} \end{cases}$$

On a, par exemple, dans la série de Fibonacci

$$(65)\quad \begin{cases} u_r^2-u_{2r}^2+u_{3r}^2-\ldots-(-1)^{nr}u_{nr}^2=\dfrac{1}{5}\left[2n+1-(-1)^{nr}\dfrac{u_{(2n+1)r}}{u_r}\right], \\[2ex] u_r^2+u_{3r}^2+u_{5r}^2+\ldots+u_{(2n+1)r}^2=\dfrac{1}{5}\left[\dfrac{u_{4(n+1)r}}{u_{2r}}-(-1)^{nr}(2n+2)\right], \\[2ex] v_r^2-v_{2r}^2+v_{3r}^2-\ldots-(-1)^n v_{nr}^2=2n-1-(-1)^{nr}\dfrac{u_{(2n+1)r}}{u_r}, \\[2ex] v_r^2+v_{3r}^2+v_{5r}^2+\ldots+v_{(n+1)r}^2=\dfrac{u_{4(n+1)r}}{u_{2r}}-(-1)^r(2n-2); \end{cases}$$

la formule plus simple

$$(66)\quad u_1^2+u_2^2+u_3^2+\ldots+u_n^2=u_nu_{n+1},$$

donne ainsi, pour le côté du décagone régulier étoilé, cette expression

$$(67)\quad \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=1+\dfrac{1}{1^2}-\dfrac{1}{1^2+1^2}+\dfrac{1}{1^2+1^2+2^2}-\dfrac{1}{1^2+1^2+2^2+3^2} \\[2ex] \qquad\qquad+\dfrac{1}{1^2+1^2+2^2+3^2+5^2}-\ldots. \end{cases}$$

On a encore, dans cette série

$$(68) \quad \begin{cases} u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_4 + \ldots . + u_{2n-1}u_{2n} = u_{2n}^2, \\ u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_4 + \ldots . + u_{2n}u_{2n+1} = u_{2n+1}^2 - 1. \end{cases}$$

SECTION XI.

Des relations des fonctions U_n et V_n avec la théorie du plus grand commun diviseur.

Nous avons trouvé la formule

$$2U_{m+n} = U_m V_n + U_n V_m;$$

par conséquent, si un nombre impair quelconque θ divise U_{m+n} et U_m, il divise $U_n V_m$; mais nous avons démontré (§ 17) que U_m et V_m sont premiers entre eux; donc θ divise U_n. Inversement, tout nombre impair qui divise U_n et U_m divise U_{m+n}; donc, en ne tenant pas compte du facteur 2, on a cette proposition fondamentale:

THÉORÈME: *Le plus grand commun diviseur de U_m et de U_n est égal à U_D, en désignant par D le plus grand commun diviseur de m et de n.*

En particulier, les termes U_m et U_n sont premiers entre eux lorsque m et n sont premiers entre eux, car U_1 est égal à l'unité. On déduit d'ailleurs du théorème fondamental un grand nombre de propositions entièrement semblables à celles que l'on obtient dans la théorie du plus grand commun diviseur et du plus petit multiple commun de plusieurs nombres donnés.

Il résulte encore de ce qui précède que, dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux termes U_m et U_n, les restes successifs forment aussi des termes de la série; en particulier, les restes successifs de deux termes consécutifs donnent, dans le cas de Q négatif, tous les termes de la série décroissante, à partir du plus petit d'entre eux. LAMÉ * a observé que, dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres quelconques, le nombre des restes est au plus égal au nombre des termes de la série de FIBONACCI, inférieurs au plus petit des deux nombres donnés, et il en a déduit ce théorème:

Le nombre des divisions à effectuer dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres donnés est au plus égal, dans le système ordinaire de numération, à cinq fois le nombre des chiffres du plus petit des deux nombres donnés.

---

* Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. xix, pag. 868. Paris, 1844.

On trouverait une limite plus rapprochée, en calculant par logarithmes le rang du terme de la série de FIBONACCI immediatement inférieur au plus petit des nombres donnés. On voit aisément qu'il suffirait, en désignant ce plus petit nombre par A, de prendre le plus petit entier contenu dans la fraction

$$\frac{\log A + \log \sqrt{5}}{\log \frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{\log A + 0.349}{0.209}.$$

Mais il est préférable de s'en tenir à la limite donnée par l'élégant théorème que nous venons de rappeler.

SECTION XII.

De la multiplication des fonctions numériques.

On peut exprimer les valeurs de U_n et V_n qui correspondent à toutes les valeurs entières et positives de n, en fonction des valeurs initiales; en effet, on a successivement, pour U, par exemple,

$$(69)\quad \begin{cases} U_2 = PU_1 - QU_0, \\ U_3 = (P^2 - Q)\, U_1 - QPU_0, \\ U_4 = (P^3 - 2PQ)\, U_1 - Q\,(P^2 - Q)\, U_0, \\ U_5 = (P^4 - 3P^2Q + Q^2)\, U_1 - Q\,(P^3 - 2PQ)\, U_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

On observera d'abord que si ϕ_n désigne le coefficient de U_1 dans U_{n+1}, on a en général,

$$U_{n+1} = \phi_n U_1 - Q\phi_{n-1} U_0.$$

Le coefficient ϕ_n est une fonction homogène et de degré n, de P et de Q, en y considérant P au premier degré et Q au second. Si l'on forme le tableau des coefficients de ϕ_n, on retrouve aisément le triangle arithmétique, mais dans une disposition spéciale. On a d'ailleurs, ainsi qu'on peut le vérifier *a posteriori*

$$(70)\quad \begin{cases} \phi_n = P^n - \frac{n-1}{1} P^{n-2}Q + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2} P^{n-4}Q^2 \\ \qquad - \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3} P^{n-6}Q^3 + \ldots, \end{cases}$$

et, en même temps

$$(71)\quad \begin{cases} U_{n+1} = \phi_n U_1 - Q\phi_{n-1} U_0, \\ V_{n+1} = \phi_n V_1 - Q\phi_{n-1} V_0, \end{cases}$$

avec les conditions initiales

$$U_0 = 0, \quad U_1 = 1, \quad V_0 = 2, \quad V_1 = P;$$

par conséquent, on a encore

$$\phi_n = U_{n+1}.$$

On a, en particulier, dans la série de FIBONACCI, pour $P = 1$ et $Q = -1$,

$$(72)\qquad 1 + C_{n-1,1} + C_{n-2,2} + C_{n-3,3} + \ldots\ldots = u_n,$$

et, pour $P = 1$, $Q = 1$,

$$(73)\qquad 1 - C_{n-1,1} + C_{n-2,2} - C_{n-3,3} + \ldots = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{n\pi}{3}.$$

Les formules précédentes se généralisent aisément par la considération de l'équation (8). En effet, si l'on pose

$$(74)\qquad \psi_n = V_r^n - \frac{n-1}{1} V_r^{n-2} Q^r + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2} V_r^{n-4} Q^{2r} - \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3} V_r^{n-6} Q^{3r} + \ldots.$$

on obtient, comme ci-dessus,

$$(75)\quad \begin{cases} U_{m+2nr} = \psi_{n-1} U_{m+r} - Q^r \psi_{n-2} U_m, \\ V_{m+2nr} = \psi_{n-1} V_{m+r} - Q^r \psi_{n-2} V_m, \end{cases}$$

et, pour $m = 0$, on a encore la relation

$$(76)\qquad \psi_{n-1} = \frac{U_{2nr}}{U_r}$$

qui permet de calculer inversement la fonction ψ à l'aide des valeurs de U. D'ailleurs, cette relation, dans laquelle n désigne un nombre entier, a lieu quelle que soit la valeur de r; on a ainsi, pour $r = 0$, la formule

$$(77)\qquad n = 2^{n-1} - C_{n-2,1} 2^{n-3} + C_{n-3,2} 2^{n-5} - C_{n-4,3} 2^{n-7} + \ldots.$$

Nous ferons observer que les résultats précédents correspondent aux développements bien connus de $\frac{\sin nz}{\sin z}$ et de $\cos nz$ suivant les puissances de $\cos z$, obtenus pour la première fois par VIÈTE.*

---

* OPERA, Leyde, 1646, pag. 295–299.

SECTION XIII.

De la loi de la répétition des nombres premiers dans les séries récurrentes simplement périodiques.

Nous exprimerons encore les fonctions U_{np} et V_{np}, en fonctions entières de U_n et de V_n, par des formules analogues à celles qui ont été données par MOIVRE et par LAGRANGE.*

En effet, si l'on désigne par C_m^n le nombre des combinaisons de m objets pris n à n, on a la relation suivante :

$$(78)\quad \alpha^p+\beta^p=(\alpha+\beta)^p-\frac{p}{1}\alpha\beta(\alpha+\beta)^{p-2}+\frac{p}{2}C^1_{p-3}\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)^{p-4}+\ldots\ldots$$
$$+(-1)^r\frac{p}{r}C^{r-1}_{p-r-1}\alpha^r\beta^r(\alpha+\beta)^{p-2r}+\ldots\ldots,$$

que l'on peut vérifier *à posteriori*, et dans laquelle tous les coefficients sont entiers, puisque l'on a

$$\frac{p}{r}C^{r-1}_{p-r-1}=C^r_{p-r-1}+C^{r-1}_{p-r-1}\,.$$

Posons, dans l'hypothèse de p *impair*,

$$\alpha=a^n \text{ et } \beta=-b^n,$$

nous obtenons

$$(79)\qquad U_{np}=\delta^{p-1}U_n^p+\frac{p}{1}Q^n\delta^{p-3}U_n^{p-2}+\frac{p}{2}C^1_{p-3}Q^{2n}\delta^{p-5}U_n^{p-4}+\ldots\ldots$$
$$+\frac{p}{r}C^{r-1}_{p-r-1}Q^{nr}\delta^{p-2r-1}U_n^{p-2r}+\ldots\ldots.$$

La formule précédente conduit à la loi de la répétition des nombres premiers dans les séries récurrentes que nous considérons ici. Dans la série naturelle des nombres entiers, un nombre premier p apparaît pour la première fois, à son rang, et à la première puissance ; il arrive à la seconde puissance au rang p^2, à la troisième au rang p^3, et ainsi de suite ; de plus, tous les termes divisibles par p^α occupent un rang égal à un multiple quelconque de p^α. Mais dans les séries récurrentes simplement périodiques, il n'en est pas complètement ainsi. Nous démontrons plus loin que les termes de celles-ci contiennent, à des rangs déterminés, tous les nombres premiers ;

* Commentarii Acad. Petrop., t. XIII, ad annum MDCCXLI–XLIII, pag. 29. Leçons sur le calcul des fonctions, pag. 119.

mais si ces nombres premiers p n'apparaissent pas, pour la première fois, dans la série au rang p, cependant ils s'y reproduisent à intervalles égaux à p, comme dans la série ordinaire, et l'apparition de leurs puissances successives se fait comme dans la série naturelle. Ainsi, en général, dans l'étude arithmétique des séries, deux lois sont à considérer: la *loi de l'apparition* des nombres premiers, et la *loi de la répétition.*

Nous démontrerons, pour l'instant, que la loi de la répétition est identiquement la même dans la série naturelle, et dans les séries des U_n. En effet, si p désigne un nombre premier, et U_n le premier terme de la série divisible par p^λ, on observera que le dernier terme de la formule précédente est divisible par $p^{\lambda+1}$, et non par une puissance supérieure de p; on a donc la proposition fondamentale suivante:

THÉORÈME: *Si λ désigne le plus grand exposant d'un nombre premier p contenu dans U_n, l'exposant de la plus haute puissance de p, qui divise U_{pn}, est égal à $\lambda + 1$.*

Ainsi, par exemple, dans la série de FIBONACCI, u_8 est divisible par 7; donc u_{56} est divisible par 7^2 et non par 7^3; dans la série de PELL, u_7 et u_{30} sont respectivement divisibles par 13^2 et par 31^2; donc U_{91} et U_{930} sont divisibles par 13^3 et par 31^3, et non par des puissances supérieures.

Inversement, si $a^p \pm b^p$ est divisible par p^λ, $a \pm b$ est divisible par $p^{\lambda-1}$; ce résultat donne des conséquences importantes dans la théorie de l'équation indéterminée

$$x^p + y^p + z^p = 0,$$

dont l'irrésolubilité, non démontrée jusqu'à présent, constitue la dernière proposition de FERMAT.

SECTION XIV.

Nouvelles formes linéaires et quadratiques des diviseurs de U_n et de V_n.

La formule (79) donne, successivement, pour p égal à 3, 5, 7, 9, ... les formules suivantes

$$(80)\quad\left\{\begin{aligned}
U_{3n} &= \Delta\, U_n^3 + 3Q^n U_n,\\
U_{5n} &= \Delta^2 U_n^5 + 5Q^n\Delta\, U_n^3 + 5Q^{2n} U_n,\\
U_{7n} &= \Delta^3 U_n^7 + 7Q^n\Delta^2 U_n^5 + 14Q^{2n}\Delta\, U_n^3 + 7Q^{3n} U_n,\\
U_{9n} &= \Delta^4 U_n^9 + 9Q^n\Delta^3 U_n^7 + 27Q^{2n}\Delta^2 U_n^5 + 30Q^{3n}\Delta\, U_n^3 + 9Q^{4n} U_n,\\
U_{11n} &= \Delta^5 U_n^{11} + 11Q^n\Delta^4 U_n^9 + 44Q^{2n}\Delta^3 U_n^7 + 77Q^{3n}\Delta^2 U_n^5 + 55Q^{4n}\Delta\, U_n^3\\
&\qquad + 11Q^{5n} U_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

On a ainsi

(81) $$\frac{U_{3n}}{U_n} = \Delta U_n^2 + 3Q^n,$$

et, par suite, la proposition suivante:

THÉORÈME: *Les diviseurs de* $\frac{U_{3n}}{U_n}$ *sont des diviseurs de la forme quadratique* $\Delta x^2 + 3Q^n y^2$.

En particulier, les formes linéaires des diviseurs premiers impairs de $\frac{U_{6n}}{U_{2n}}$ sont

pour la série de FIBONACCI: $30q + 1, 17, 19, 23$;
de FERMAT: $6q + 1$;
de PELL: $24q + 1, 5, 7, 11$;

et les formes linéaires des diviseurs premiers impairs de $\frac{U_{3(2n+1)}}{U_{2n+1}}$ sont

pour la série de FIBONACCI: $60q + 1, 7, 11, 17, 43, 49, 53, 59$;
de FERMAT: $24q + 1, 5, 7, 11$;
de PELL: $24q + 1, 5, 19, 23$.

On a aussi

(82) $$4\frac{U_{5n}}{U_n} = (2\Delta U_n^2 + 5Q^n)^2 - 5Q^{2n},$$

et, par suite:

THÉORÈME: *Les diviseurs de* $\frac{U_{5n}}{U_n}$ *sont des diviseurs de la forme quadratique* $x^2 - 5y^2$.

Les formes linéaires des diviseurs premiers impairs sont, dans les trois séries prises pour exemples,

$$20q + 1, 9, 11, 19.$$

Nous avons aussi

(83) $$4\frac{U_{7n}}{U_n} = \Delta\,[2\Delta U_n^3 + 7Q^n U_n]^2 + 7Q^{2n} V_n^2,$$

et, par suite:

THÉORÈME: *Les diviseurs de* $\frac{U_{7n}}{U_n}$ *sont des diviseurs de la forme quadratique* $\Delta x^2 + 7y^2$.

Supposons maintenant que p désigne un nombre *pair*, et faisons encore, dans la formule (78),

$$\alpha = a^n,\ \beta = -b^n,$$

nous obtenons

$$(84)\qquad V_{np} = \delta^p U_n^p + \frac{p}{1} Q^n \delta^{p-2} U_n^{p-2} + \frac{p}{2} C_{p-3}^1 Q^{2n} \delta^{p-4} U^{p-4} + \dots$$
$$+ \frac{p}{r} C_{p-r-1}^{r-1} Q^{nr} \delta^{p-2r} U_n^{p-2r} + \dots$$

On a, en particulier, pour $p = 2$, la formule

$$(85)\qquad V_{2n} = \Delta U_n^2 + 2Q^n,$$

et, par conséquent, la proposition suivante:

THÉORÈME : *Les diviseurs de V_{2n} sont des diviseurs de la forme quadratique* $\Delta x^2 + 2Q^n y^2$.

Les formes linéaires correspondantes des diviseurs premiers impairs sont, pour *n pair*

dans la série de FIBONACCI: $40q + 1$, 7, 9, 11, 13, 19, 23, 37 ;
de FERMAT: $8q + 1$, 3;
de PELL: $4q + 1$;

et, pour *n impair*

dans la série de FIBONACCI: $40q + 1$, 3, 9, 13, 27, 31, 37, 39;
de FERMAT: $4q + 1$;
de PELL: $4q + 1$.

On devra, dans les applications, combiner ces résultats avec ceux que nous avons donnés dans la Section VIII.

Faisons enfin dans la formule (79),

$$\alpha = a^n, \qquad \beta = b^n,$$

nous obtenons, en supposant indifféremment que p est égal à un nombre *pair* ou à un nombre *impair :*

$$(86)\qquad V_{np} = V_n^p - \frac{p}{1} Q^n V_n^{p-2} + \frac{p}{2} C_{p-3}^1 Q^{2n} V_n^{p-4} - \dots$$
$$+ (-1)^r \frac{p}{r} C_{p-r-1}^{r-1} Q^{nr} V_n^{p-2r} + \dots$$

On a ainsi, en faisant successivement p égal à 2, 3, 4, 5, 6, ... les résultats suivants

$$(87)\quad \begin{cases} V_{2n} = V_n^2 - 2Q^n, \\ V_{3n} = V_n^3 - 3Q^n V_n, \\ V_{4n} = V_n^4 - 4Q^n V_n^2 + 2Q^{2n}, \\ V_{5n} = V_n^5 - 5Q^n V_n^3 + 5Q^{2n} V_n, \\ V_{6n} = V_n^6 - 6Q^n V_n^4 + 9Q^{2n} V_n^2 - 2Q^{3n}, \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

qui conduisent encore à des formules entièrement semblables aux précédentes.

SECTION XV.

Des relations des fonctions U_n et V_n avec les radicaux continus.

On tire de l'équation

$$x^2 = Px - Q,$$

la formule

$$x = \sqrt{-Q + Px},$$

et, successivement

$$x = \sqrt{-Q + P\sqrt{-Q + Px}}$$

$$x = \sqrt{-Q + P\sqrt{-Q + P\sqrt{-Q + Px}}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

par conséquent, puisque l'on peut supposer P positif, on a, pour Q négatif,

(88) $$a = \text{Lim.}\sqrt{-Q + P\sqrt{-Q + P\sqrt{-Q + \ldots\ldots}}},$$

a désignant la racine positive de l'équation proposée. Ainsi, dans la série de FIBONACCI

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \text{Lim.}\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots\ldots}}}},$$

dans la série de PELL,

$$1 + \sqrt{2} = \text{Lim.}\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + \ldots\ldots}}}},$$

et, dans la série de FERMAT,

$$2 = \text{Lim.}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots\ldots}}}}.$$

On sait que ce dernier radical se présente dans le calcul de π, par la méthode des périmètres, imaginée par ARCHIMÈDE.

Mais les résultats obtenus dans la section précédente, conduisent à des formules plus importantes, qui trouveront leur emploi dans la recherche des grands nombres premiers. On tire, par exemple, de la première des formules (87)

$$V_n = \sqrt{2Q^n + V_{2n}};$$

et, de même, en changeant n en $2n$, $4n$, $8n$, ...

$$V_{2n} = \sqrt{2Q^{2n} + V_{4n}},$$

$$V_{4n} = \sqrt{2Q^{4n} + V_{8n}},$$

$$V_{8n} = \sqrt{2Q^{8n} + V_{16n}};$$

et, par suite,

$$(89)\quad \begin{cases} V_n = \sqrt{2Q^n + V_{2n}}, \\ V_n = \sqrt{2Q^n + \sqrt{2Q^{2n} + V_{4n}}}, \\ V_n = \sqrt{2Q^n + \sqrt{2Q^{2n} + \sqrt{2Q^{4n} + V_{8n}}}}, \\ V_n = \sqrt{2Q^n + \sqrt{2Q^{2n} + \sqrt{2Q^{4n} + \sqrt{2Q^{8n} + V_{16n}}}}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{cases}$$

et ainsi indéfiniment. Ces formules sont analogues à celles que l'on obtient pour $\cos\frac{\pi}{4}$, $\cos\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{\pi}{16}$, $\cos\frac{\pi}{32}$, .. $\cos\frac{\pi}{2^r}$.

La seconde des relations (87) donne de la même façon

$$(90)\quad \begin{cases} V_n = \sqrt{3Q^n + \frac{V_{3n}}{V_n}}, \\ V_n = \sqrt{2Q^n + \sqrt{3Q^{2n} + \frac{V_{6n}}{V_{2n}}}}, \\ V_n = \sqrt{2Q^n + \sqrt{2Q^{2n} + \sqrt{3Q^{4n} + \frac{V_{12n}}{V_{4n}}}}}, \end{cases}$$

ces formules sont semblables à celles que l'on obtient pour $\cos\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{\pi}{12}$, $\cos\frac{\pi}{24}$, ... $\cos\frac{\pi}{3.2^r}$.

La troisième des relations (87) conduit encore à des formules qui correspondent à celles qui donnent $\cos\frac{\pi}{10}$, $\cos\frac{\pi}{20}$, $\cos\frac{\pi}{40}$, .. $\cos\frac{\pi}{5.2^r}$; et ainsi de quelques autres.

SECTION XVI.

Développements des puissances de U_n et de V_n en fonctions linéaires des termes dont les arguments sont des multiples de n.

On peut exprimer les puissances de U_n et de V_n en fonctions linéaires des termes dont les rangs sont des multiples de n, par des formules analogues à celles qui donnent les puissances de sin z et de cos z, développées suivant les sinus et les cosinus des multiples de l'arc z. En désignant d'abord par p un nombre *impair*, le développement de $(\alpha - \beta)^p$, donne

$$(\alpha-\beta)^p = (\alpha^p - \beta^p) - \frac{p}{1}\alpha\beta(\alpha^{p-2} - \beta^{p-2}) + \frac{p(p-1)}{1.2}\alpha^2\beta^2(\alpha^{p-4} - \beta^{p-4}) - \ldots$$

et, par suite, en faisant

$$\alpha = a^n, \qquad \beta = b^n,$$

on obtient la formule

$$(91) \quad \Delta^{\frac{p-1}{2}} U_n^p = U_{pn} - \frac{p}{1} Q^n U_{(p-2)n} + \frac{p(p-1)}{1.2} Q^{2n} U_{(p-4)n}$$

$$- \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} Q^{3n} U_{(p-6)n} + \ldots + \ldots \pm \frac{p(p-1)\ldots\frac{p+3}{2}}{1.2\ldots.\frac{p-1}{2}} Q^{\frac{p-1}{2}n} U_n.$$

On a successivement, pour p égal à 3, 5, 7, 9, . . .

$$(92) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta U_n^3 = U_{3n} - 3Q^n U_n, \\ \Delta^2 U_n^5 = U_{5n} - 5Q^n U_{3n} + 10Q^{2n} U_n, \\ \Delta^3 U_n^7 = U_{7n} - 7Q^n U_{5n} + 21Q^{2n} U_{3n} - 35Q^{4n} U_n, \\ \Delta^4 U_n^9 = U_{9n} - 9Q^n U_{7n} + 36Q^{2n} U_{5n} - 84Q^{4n} U_{3n} + 126Q^{6n} U_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Le développement de $(\alpha - \beta)^p$ donne encore, en supposant maintenant que p désigne un nombre *pair*:

$$(93) \quad \Delta^{\frac{p}{2}} U_n^p = V_{pn} - \frac{p}{1} Q^n V_{(p-2)n} + \frac{p(p-1)}{1.2} Q^{2n} V_{(p-4)n}$$

$$- \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} Q^{3n} V_{(p-6)n} + \ldots + \ldots \pm \frac{p(p-1)\ldots\left(\frac{p}{2}+1\right)}{1.2\ldots.\frac{p}{2}} Q^{\frac{p}{2}n},$$

et, pour p successivement égal à 2, 4, 6, 8, . . .

$$(94) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta U_n^2 = V_{2n} - 2Q^n, \\ \Delta^2 U_n^4 = V_{4n} - 4Q^n V_{2n} + 6Q^{2n}, \\ \Delta^3 U_n^6 = V_{6n} - 6Q^n V_{4n} + 15Q^{2n} V_{2n} - 20Q^{3n}, \\ \Delta^4 U_n^8 = V_{8n} - 8Q^n V_{6n} + 28Q^{2n} V_{4n} - 56Q^{3n} V_{2n} + 70Q^{4n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Le développement de $(\alpha + \beta)^p$ donne, dans l'hypothèse de p égal à un nombre *impair*,

$$(95) \quad V_n^p = V_{pn} + \frac{p}{1} Q^n V_{(p-2)n} + \frac{p(p-1)}{1.2} Q^{2n} V_{(p-4)n}$$

$$+ \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} Q^{3n} V_{(p-6)n} + \ldots + \ldots + \frac{p(p-1)\ldots\frac{p+3}{2}}{1.2\ldots\frac{p-1}{2}} Q^{\frac{p-1}{2}n} V_n,$$

et, plus particulièrement

$$(96)\quad \begin{cases} V_n^3 = V_{3n} + 3Q^n V_n\,, \\ V_n^5 = V_{5n} + 5Q^n V_{3n} + 10Q^{2n} V_n\,, \\ V_n^7 = V_{7n} + 7Q^n V_{5n} + 21Q^{2n} V_{3n} + 35Q^{3n} V_n\,, \\ V_n^9 = V_{9n} + 9Q^n V_{7n} + 36Q^{2n} V_{5n} + 84Q^{3n} V_{3n} + 126Q^{4n} V_n\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

De même, lorsque p désigne un nombre *pair*,

$$(97)\quad V_n^p = V_{pn} + \frac{p}{1} Q^n V_{(p-2)n} + \frac{p(p-1)}{1.2} Q^{2n} V_{(p-4)n} + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} Q^{3n} V_{(p-6)n} + \dots + \dots + \frac{p(p-1)\dots\left(\frac{p}{2}+1\right)}{1.2\dots\left(\frac{p}{2}\right)} Q^{\frac{p}{2}n}\,;$$

on a, plus particulièrement,

$$(98)\quad \begin{cases} V_n^2 = V_{2n} + 2Q^n\,, \\ V_n^4 = V_{4n} + 4Q^n V_{2n} + 6Q^{2n}\,, \\ V_n^6 = V_{6n} + 6Q^n V_{4n} + 15Q^{2n} V_{2n} + 20Q^{3n}\,, \\ V_n^8 = V_{8n} + 8Q^n V_{6n} + 28Q^{2n} V_{4n} + 56Q^{3n} V_{2n} + 70Q^{4n}\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Les relations (91), (93), (95) et (97) sont elles mêmes des cas particuliers des formules suivantes:

$$(99)\quad \begin{cases} V_r^n U_{(m-n)r} = U_{mr} + \frac{n}{1} Q^r U_{(m-2)r} + \frac{n(n-1)}{1.2} Q^{2r} U_{(m-4)r} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} Q^{3r} U_{(m-6)r} + \dots\,, \\ V_r^n V_{(m-n)r} = V_{mr} + \frac{n}{1} Q^r V_{(m-2)r} + \frac{n(n-1)}{1.2} Q^{2r} V_{(m-4)r} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} Q^{3r} V_{(m-6)r} + \dots\,, \\ \Delta^n U_r^{2n} U_{(m-2n)r} = U_{mr} - \frac{2n}{1} Q^r U_{(m-2)r} + \frac{2n(2n-1)}{1.2} Q^{2r} U_{(m-4)r} - \dots\,, \\ \Delta^n U_r^{2n} V_{(m-2n)r} = V_{mr} - \frac{2n}{1} Q^r V_{(m-2)r} + \frac{2n(2n-1)}{1.2} Q^{2r} V_{(m-4)r} - \dots\,, \\ \Delta^n U_r^{2n+1} U_{(m-2n-1)r} = U_{mr} - \frac{2n+1}{1} Q^r U_{(m-2r)} + \frac{(2n+1).2n}{1.2} Q^{2r} U_{(m-4)r} - \dots \\ \Delta^n U_r^{2n+1} V_{(m-2n-1)r} = V_{mr} - \frac{2n+1}{1} Q^r V_{(m-2r)} + \frac{(2n+1).2n}{1.2} Q^{2r} V_{(m-4)r} - \dots \end{cases}$$

Ces relations trouvent principalement leur emploi dans la sommation des puissances semblables des fonctions U_n et V_n. Le développement de la puissance d'un binôme donne encore lieu à un certain nombre d'autres. Ainsi, on a, par exemple

$$\alpha = \overline{\alpha + \beta} - \beta \quad \text{et} \quad \beta = \overline{\beta + \alpha} - \alpha\ ;$$

donc, pour p égal à un nombre *impair*

$$\alpha^p + \beta^p = (\alpha+\beta)^p - \frac{p}{1}\beta(\alpha+\beta)^{p-1} + \frac{p\,(p-1)}{1\,.\,2}\beta^2(\alpha+\beta)^{p-2} + \ldots + \frac{p}{1}\beta^{p-1}(\alpha+\beta),$$

$$\alpha^p + \beta^p = (\alpha+\beta)^p - \frac{p}{1}\alpha(\alpha+\beta)^{p-1} + \frac{p\,(p-1)}{1\,.\,2}\alpha^2(\alpha+\beta)^{p-2} + \ldots + \frac{p}{1}\alpha^{p-1}(\alpha+\beta)\ ;$$

on a ainsi, en ajoutant et en retranchant, après avoir posé $\alpha = a^n$, $\beta = b^n$, les formules suivantes :

$$(100)\quad \begin{cases} 2V_{np} = V_0 V_n^p - \dfrac{p}{1} V_n V_n^{p-1} + \dfrac{p\,(p-1)}{1\,.\,2} V_{2n} V_n^{p-2} + \ldots + \dfrac{p}{2} V_{(p-1)n} V_n\,, \\ 0 = \dfrac{p}{1} U_n V_n^{p-1} - \dfrac{p\,(p-1)}{1\,.\,2} U_{2n} V_n^{p-2} + \ldots - \dfrac{p}{1} U_{(p-1)n} V_n\,. \end{cases}$$

On trouvera des développements analogues pour p égal à un nombre pair, et d'autres encore à l'aide des identités

$$\alpha = \overline{\alpha - \beta} + \beta \text{ et } \beta = \overline{\beta - \alpha} + \alpha\,.$$

La formule suivante, que l'on peut déduire du *Problème des partis*

$$\begin{aligned} &(\alpha+\beta)^{p+q-1} \\ &= \alpha^p \left[(\alpha+\beta)^{q-1} + \frac{p}{1}(\alpha+\beta)^{q-2}\beta + \frac{p\,(p+1)}{1\,.\,2}(\alpha+\beta)^{q-3}\beta^2 + \ldots + C_{p+q-2}^{q-1}\beta^{q-1}\right] \\ &+ \beta^q \left[(\alpha+\beta)^{p-1} + \frac{q}{1}(\alpha+\beta)^{p-2}\alpha + \frac{q\,(q+1)}{1\,.\,2}(\alpha+\beta)^{q-3}\alpha^2 + \ldots + C_{p+q-2}^{p-1}\alpha^{q-1}\right] \end{aligned}$$

donne en changeant α en β, puis par addition et par soustraction,

$$(101)\quad \begin{cases} 2V_n^{p+q-1} = V_{pn} V_n^{q-1} + \dfrac{p}{1} Q^n V_{(p-1)n} V_n^{q-2} + \dfrac{p\,(p+1)}{1\,.\,2} Q^{2n} V_{(p-2)n} V_n^{q-3} \\ \qquad + \ldots + C_{p+q-2}^{q-1} Q^{(q-1)n} V_{(p-q+1)n} + V_{qn} V_n^{p-1} + \dfrac{q}{1} Q^n V_{(q-1)n} V_n^{p-2} \\ \qquad + \dfrac{q\,(q+1)}{1\,.\,2} Q^{2n} V_{(q-2)n} V_n^{p-3} + \ldots + C_{p+q-2}^{p-1} Q^{(p-1)} V^{(q-p+1)n}\,, \\ 0 = U_{pn} V_n^{q-1} + \dfrac{p}{1} Q^n U_{(p-1)n} V_n^{q-2} + \dfrac{p\,(p+1)}{1\,.\,2} Q^{2n} U_{(p-2)n} V_n^{q-3} \\ \qquad + \ldots + C_{p+q-2}^{q-1} Q^{(q-1)n} U_{(p-q+1)n} - U_{qn} V_n^{p-1} - \dfrac{q}{1} Q^n U_{(q-1)n} V_n^{p-2} \\ \qquad - \dfrac{q\,(q+1)}{1\,.\,2} Q^{2n} U_{(q-2)n} V_n^{p-3} - \ldots - C_{p+q-2}^{p-1} Q^{(p-1)n} U_{(q-p+1)n}\,. \end{cases}$$

On obtiendrait deux autres formules semblables aux précédentes, en posant $\alpha = a^n$ et $\beta = b^n$; on simplifie ces formules, en faisant $p = q$.

SECTION XVII.

Autres formules concernant le développement des fonctions numériques U_n et V_n.

Considérons les fonctions α et β de z,

$$\alpha = \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - 4h}}{2}\right)^n, \qquad \beta = \left(\frac{z - \sqrt{z^2 - 4h}}{2}\right)^n;$$

on tire, en différentiant

$$\frac{d\alpha}{\alpha dz} = \frac{n}{\sqrt{z^2 - 4h}},$$

et, en faisant disparaître le radical

$$(z^2 - 4h)\frac{d\alpha^2}{dz^2} - n^2\alpha^2 = 0.$$

Une nouvelle différentiation nous donne

$$(z^2 - 4h)\frac{d^2\alpha}{dz^2} + z\frac{d\alpha}{dz} - n^2\alpha = 0;$$

il est d'ailleurs facile de voir que les fonctions β, $\alpha + \beta$ et $\alpha - \beta$ vérifient la même équation différentielle. On a donc, en désignant par $f(z)$ l'une quelconque d'entre elles, par l'application du théorème de LEIBNIZ

$$(z^2 - 4h)\frac{d^{p+2}f(z)}{dz^{p+2}} + (2p + 1)z\frac{d^{p+1}f(z)}{dz^{p+1}} + (p^2 - n^2)\frac{d^p f(z)}{dz^p} = 0,$$

et, pour $z = 0$,

$$4h\frac{d^{p+2}f(0)}{dz^{p+2}} = (p^2 - n^2)\frac{d^p f(0)}{dz^p}.$$

Si l'on suppose $z = V_r$, $h = Q^r$, la formule de MACLAURIN nous donne, pour *n pair*, les deux développements

$$(102)\quad \begin{cases} \dfrac{V_{nr}}{2(-Q^r)^{\frac{n}{2}}} = 1 - \dfrac{n^2}{1.2}\dfrac{V_r^2}{2^2Q^r} + \dfrac{n^2(n^2-2^2)}{1.2.3.4}\dfrac{V_r^4}{2^4Q^{2r}} - \dfrac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{1.2.3.4.5.6}\dfrac{V_r^6}{2^6Q^{3r}} + \cdots, \\[2ex] \dfrac{-U_{nr}}{2(-Q^r)^{\frac{n}{2}}U_r} = \dfrac{n}{1}\dfrac{V_r}{2Q^r} - \dfrac{n(n^2-2^2)}{1.2.3}\dfrac{V_r^3}{2^3Q^{3r}} + \dfrac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{1.2.3.4.5}\dfrac{V_r^5}{2^5Q^{5r}} - \cdots. \end{cases}$$

et, pour *n impair*

$$(103)\quad \begin{cases} \dfrac{U_{nr}}{(-Q^r)^{\frac{n-1}{2}}} = U_r\left[1 - \dfrac{n^2-1^2}{1.2}\dfrac{V_r^2}{2^2Q^r} + \dfrac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1.2.3.4}\dfrac{V_r^4}{2^4Q^{2r}} - \cdots\right], \\[2ex] \dfrac{V_{nr}}{(-Q^r)^{\frac{n-1}{2}}} = V_r\left[n - \dfrac{n(n^2-1^2)}{1.2.3}\dfrac{V_r^2}{2^2Q^r} + \dfrac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1.2.3.4.5}\dfrac{V_r^4}{2^4Q^{2r}} - \cdots\right]. \end{cases}$$

On peut d'ailleurs vérifier ces formules, et les suivantes, *à posteriori*, en observant que si l'on pose

$$G_{m,\kappa} = (m^2 - 2^2)(m^2 - 4^2) \ldots (m^2 - 4\kappa^2),$$
$$H_{m,\kappa} = (m^2 - 1^2)(m^2 - 3^2) \ldots \left(m^2 - (2\kappa - 1)^2\right),$$

on a les relations

$$mG_{m,\kappa} = (m - 2\kappa)\, H_{m+1,\kappa} = (m + 2\kappa)\, H_{m-1,\kappa}.$$

Au lieu de développer les fonctions U_{nr} et V_{nr} suivant les puissances de V_r, on peut aussi les développer suivant les puissances de U_r; on trouve ainsi, pour *n pair*

$$(104)\quad \begin{cases} \dfrac{V_{nr}}{2Q^{\frac{nr}{2}}} = 1 + \dfrac{n^2}{1.2}\dfrac{\Delta U_r^2}{2^2 Q^r} + \dfrac{n^2(n^2-2^2)}{1.2.3.4}\dfrac{\Delta^2 U_r^4}{2^4 Q^{2r}} + \dfrac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{1.2.3.4.5}\dfrac{\Delta^3 U_r^6}{2^6 Q^{3r}} + \ldots, \\ \dfrac{U_{nr}}{Q^{(\frac{n}{2}-1)r}} = \dfrac{U_{2r}}{2}\left[n + \dfrac{n(n^2-2^2)}{1.2.3}\dfrac{\Delta U_r^2}{2^2 Q^r} + \dfrac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{1.2.3.4.5}\dfrac{\Delta^2 U_r^4}{2^4 Q^{2r}} + \ldots\right], \end{cases}$$

et, pour *n impair*

$$(105)\quad \begin{cases} \dfrac{V_{nr}}{Q^{\frac{n-1}{2}r}} = V_r\left[1 + \dfrac{n^2-1^2}{1.2}\dfrac{\Delta U_r^2}{2^2 Q^r} + \dfrac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1.2.3.4}\dfrac{\Delta^2 U_r^4}{2^4 Q^{2r}} \right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{1.2.3.4.5.6}\dfrac{\Delta^3 U_r^6}{2^6 Q^{3r}} + \ldots\right], \\ \dfrac{U_{nr}}{Q^{\frac{n-1}{2}r}} = U_r\left[n + \dfrac{n(n^2-1^2)}{1.2.3}\dfrac{\Delta U_r^2}{2^2 Q^r} + \dfrac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1.2.3.4.5}\dfrac{\Delta^2 U_r^4}{2^4 Q^{2r}} \right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{1.2.3.4.5.6.7}\dfrac{\Delta^3 U_r^6}{2^6 Q^{3r}} + \ldots\right]. \end{cases}$$

En ayant égard à l'une ou l'autre des relations

$$V_{nr}^2 = V_{2nr} + 2Q^{nr}, \quad \text{et} \quad \Delta U_{nr}^2 = V_{2nr} - 2Q^{nr},$$

on obtiendra de nouvelles formules, et ainsi, par exemple:

$$(106)\quad \frac{U_{nr}^2}{Q^{(n-2)r}U_r^2} = n^2 - \frac{n^2(n^2-1^2)}{3.4}\frac{\Delta U_r^2}{Q^r} + \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{3.4.5.6}\frac{\Delta^2 U_r^4}{{}^{2r}Q} - \ldots$$

On peut d'ailleurs mettre cette dernière formule et quelques autres sous une forme assez remarquable, en observant que l'on a, pour m quelconque et n entier positif, l'identité

$$\frac{m^2(m^2-1^2)(m^2-3^2)\ldots(m^2-(n-1)^2)}{3.4.5\ldots\ldots 2n} = \frac{(m-n)(m-n+1)(m-n+2)\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots\ldots(2n)}$$
$$+ \frac{(m-n+1)(m-n+2)\ldots(m+n)}{1.2.3\ldots\ldots(2n)}.$$

Par conséquent, les coefficients de la formule (106) sont entiers, et l'on a

$$\frac{n^2\,(n^2-1^2)(n^2-2^2)\,\ldots\,(n^2-\overline{r-1}^2)}{3\,.\,4\,.\,5\,\ldots\ldots\,(2r)} = C_{n+r-1}^{2r} + C_{n+r}^{2r}\,. \;*$$

Nous ferons observer que les formules (104) et (105) subsistent encore pour des valeurs quelconques de n; on a alors des développements en séries convergentes, lorsque $\frac{\Delta U_r^2}{2^2 Q^r}$ n'est pas supérieur à l'unité; en effet, si l'on pose

$$\frac{\Delta U_r^2}{2^2 Q^r} \leqslant 1\,,$$

le rapport d'un terme au précédent finit par devenir négatif (pour Δ positif), et inférieur à l'unité en valeur absolue. Cette condition est remplie pour $r = 1$ dans la série de PELL; on a donc, quelle que soit la valeur de n

$$(107)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\left[(\sqrt{2}+1)^n + (\sqrt{2}-1)^n\right] = 1 + \frac{n^2}{1\,.\,2} + \frac{n^2\,(n^2-2^2)}{1.2.3.4} \\ \qquad\qquad + \frac{n^2\,(n^2-2^2)\,(n^2-4^2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6} + \ldots, \\ \frac{1}{2}\left[(\sqrt{2}+1)^n + (\sqrt{2}-1)^n\right] = n + \frac{n(n^2-1^2)}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} + \ldots. \end{cases}$$

SECTION XVIII.

Développements en séries des irrationnelles et de leurs logarithmes népériens.

Les développements des fonctions en séries, par la formule de MACLAURIN, donnent lieu à un très-grand nombre de formules nouvelles, pour le développement des fonctions numériques que nous considérons ici, et par suite, pour celui des fonctions circulaires et hyperboliques. Lorsque les séries correspondantes ne sont convergentes que pour les valeurs de la variable dont le module est inférieur à une limite donnée, on peut toujours supposer que cette variable x est choisie de telle sorte que la série représente la fonction, pour toutes les valeurs de x dont le module est inférieur à l'unité. Soit donc la série

$$F\,(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \ldots\,;$$

* En désignant par a le résidu de n^2 suivant le module p, premier avec n, on déduit de cette identité une démonstration immédiate d'une proposition contenue au No. 128 des *Disquisitiones Arithmeticæ.*

on aura, en supposant z positif,

$$F\left(\frac{z}{1+z}\right) = A_0 + A_1\frac{z}{1+z} + A_2\frac{z^2}{(1+z)^2} + A_3\frac{z^3}{(1+z)^3} + \ldots,$$
$$F\left(\frac{1}{1+z}\right) = A_0 + A_1\frac{1}{1+z} + A_2\frac{1}{(1+z)^2} + A_3\frac{1}{(1+z)^3} + \ldots$$

et, par conséquent:

$$F\left(\frac{1}{1+z}\right) + F\left(\frac{z}{1+z}\right) = 2A_0 + A_1\frac{1+z}{1+z} + A_2\frac{1+z^2}{(1+z)^2} + A_3\frac{1+z^3}{(1+z)^3} + \ldots,$$
$$F\left(\frac{1}{1+z}\right) - F\left(\frac{z}{1+z}\right) = \qquad A_1\frac{1-z}{1+z} + A_2\frac{1-z^2}{(1+z)^2} + A_3\frac{1-z^3}{(1+z)^3} + \ldots.$$

Si l'on désigne par a la plus grande des racines, supposée positive, de l'équation fondamentale (1), par r un nombre *pair*, ou un nombre entier quelconque, suivant que la racine b est négative ou positive, et si l'on pose $z = \frac{b^r}{a^r}$, on obtient

$$(108)\quad \begin{cases} F\left(\frac{a^r}{a^r+b^r}\right) + F\left(\frac{a^r b^r}{a^r+b^r}\right) = 2A_0 + A_1\frac{V_r}{V_r} + A_2\frac{V_{2r}}{V_r^2} + A_3\frac{V_{3r}}{V_r^3} + \ldots, \\ F\left(\frac{a^r}{a^r+b^r}\right) - F\left(\frac{a^r b^r}{a^r+b^r}\right) = \sqrt{\Delta}\left[A_1\frac{U_r}{V_r} + A_2\frac{U_{2r}}{V_r^2} + A_3\frac{U_{3r}}{V_r^3} + \ldots\right]. \end{cases}$$

Si l'on suppose $z = -\frac{b^r}{a^r}$, on obtient deux développements analogues aux précédents; ces développements sont parfois, très-lentement convergents; mais leur étude conduit à des propriétés importantes dans la théorie des nombres premiers.

Le développement du binôme $(1-x)^m$ donne ainsi, pour m quelconque, les séries

$$(109)\quad \begin{cases} \frac{V_{mr}}{V_r^m} = V_0 - \frac{m}{1}\frac{V_r}{V_r} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{V_{2r}}{V_r^2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\frac{V_{3r}}{V_r^3} + \ldots, \\ \frac{U_{mr}}{V_r^m} = \frac{m}{1}\frac{U_r}{V_r} - \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{U_{2r}}{V_r^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\frac{U_{3r}}{V_r^3} - \ldots, \end{cases}$$

que l'on aurait pu déduire de la série de BERNOULLI; pour $m = -1$, on a

$$(110)\quad \begin{cases} \frac{V_r^2}{Q^r} = V_0 + \frac{V_r}{V_r} + \frac{V_{2r}}{V_r^2} + \frac{V_{3r}}{V_r^3} + \ldots, \\ \frac{U_{2r}}{Q^r} = \frac{U_r}{V_r} + \frac{U_{2r}}{V_r^2} + \frac{U_{3r}}{V_r^3} + \frac{U_{4r}}{V_r^4} + \ldots, \end{cases}$$

et, par exemple, dans la série de FIBONACCI

$$(111)\quad \begin{cases} 9 = 2 + \frac{3}{3} + \frac{7}{9} + \frac{18}{27} + \frac{47}{81} + \ldots, \\ 3 = \frac{1}{3} + \frac{3}{9} + \frac{8}{27} + \frac{21}{81} + \frac{55}{243} + \ldots; \end{cases}$$

les numérateurs de ces deux séries de fractions sont donnés par la relation de récurrence

$$N_{n+2} = 3N_{n+1} - N_n.$$

On obtiendra des formules semblables pour $m = \pm \frac{1}{2}$; le développement de

$$(1+x)^m \pm (1-x)^m$$

donne des formules analogues aux relations (109).

Le développement de Log $(1 - x)$ donne les formules

$$(112)\quad \begin{cases} \text{Log}\, \frac{V_r^2}{Q^r} = 1 + \frac{1}{2}\frac{V_{2r}}{V_r^2} + \frac{1}{3}\frac{V_{3r}}{V_r^3} + \frac{1}{4}\frac{V_{4r}}{V_r^4} + \ldots \\ \text{Log}\, \frac{b^{2r}}{Q^r} = 2\sqrt{\Delta}\left[\frac{U_r}{V_r} + \frac{1}{2}\frac{U_{2r}}{V_r^2} + \frac{1}{3}\frac{U_{3r}}{V_r} + \frac{1}{4}\frac{U_{4r}}{V_r^7} + \ldots\right]; \end{cases}$$

celui de Log $\frac{1-x}{1+x}$ donne

$$(113)\quad \text{Log}\, \frac{b^{2r}}{Q^r} = 2\sqrt{\Delta}\left[\frac{U_r}{V_r} + \frac{1}{3}\frac{\Delta U_{3r}}{V_r^3} + \frac{1}{5}\frac{\Delta^2 U_{5r}}{V_r^5} + \frac{1}{7}\frac{\Delta^2 U_{7r}}{V_r^7} + \ldots\right],$$

et, dans la série de PELL

$$(114)\quad \sqrt{2}\,\text{Log}\,(1+\sqrt{2}) = 1 + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2^2.5} + \frac{1}{2^3.7} + \frac{1}{2^5.9} + \ldots.$$

La formule

$$\frac{1}{2}\text{Log}\,\frac{z+h}{z-h} = hz\left[\frac{1}{z^2-h^2} - \frac{2}{3}\frac{h^2}{(z^2-h^2)^2} + \frac{2.4}{3.5}\frac{h^4}{(z^2-h^2)^3} - \frac{2.4.6}{3.5.7}\frac{h^6}{(z^2-h^2)^4} + \ldots\right],$$

dans laquelle on suppose

$$z+h = a^r, \quad z-h = b^r, \quad z^2-h^2 = Q^r, \quad h^2 = \frac{\Delta U_r^2}{4},$$

donne encore

$$(115)\quad \text{Log}\,\frac{a^{2r}}{Q^r} = \frac{\sqrt{\Delta}\,U_r}{2}\left[\frac{1}{Q^r} - \frac{2}{3}\frac{\Delta U_r^2}{2^2 Q^{2r}} + \frac{2.4}{3.5}\frac{\Delta^2 U_r^4}{2^3 Q^{3r}} - \frac{2.4.6}{3.5.7}\frac{\Delta^3 U_r^6}{2^4 Q^{4r}} + \ldots\right];$$

pour que cette série soit convergente, on doit avoir $\Delta U_r^2 < 4Q^r$; on trouve ainsi, à la limite de convergence

$$(116)\quad \text{Log}\,(1+\sqrt{2}) = \sqrt{2}\left[1 - \frac{2}{3} + \frac{2.4}{3.5} - \frac{2.4.6}{3.5.7} + \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9} - \ldots\right].$$

Les développements de arc sin z et de (arc sin z)^2 donnent, de même,

$$(117)\quad \begin{cases} \text{Log}\,\dfrac{a^{2r}}{Q^r} = \dfrac{\sqrt{\Delta}\,U_r}{Q^{\frac{r}{2}}}\left[1 - \dfrac{1}{1.2.3}\,\dfrac{\Delta U_r^2}{2^2 Q^r} + \dfrac{(1.3)^2}{1.2.3.4.5}\,\dfrac{\Delta^2 U_r^4}{2^4 Q^{2r}} - \ldots\right], \\ \dfrac{1}{4}\,\text{Log}^2\,\dfrac{a^{2r}}{Q^r} = \dfrac{\Delta U_r^2}{2^2 Q^r} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\,\dfrac{\Delta^2 U_r^4}{2^4 Q^{2r}} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2.4}{3.5}\,\dfrac{\Delta^3 U_r^6}{2^6 Q^{3r}} - \ldots\ldots, \end{cases}$$

et, à la limite de convergence,

$$(118)\quad \begin{cases} \text{Log}\,(1+\sqrt{2}) = 1 - \dfrac{1}{1.2.3} + \dfrac{(1.3)^2}{1.2.3.4.5} - \dfrac{(1.3.5)^2}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots, \\ \text{Log}^2\,(1+\sqrt{2}) = 1 - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2.4}{3.5} - \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{2.4.6}{3.5.7} + \ldots \end{cases}$$

La formule remarquable de M. SCHOLTZ conduit au développement

$$(119)\quad \text{Log}^3\,\frac{a^{2r}}{Q^r} = \frac{\Delta^{\frac{3}{2}} U_r^3}{Q^{\frac{3r}{2}}}\left[1 - \frac{3.3}{4.5}\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\frac{\Delta U_r^2}{2^2 Q^r} + \frac{3.5.3}{4.6.7}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\right)\frac{\Delta^2 U_r^4}{2^4 Q^{2r}} - \ldots\right.$$

$$\left.\pm\frac{3.5.7\ldots(2n-1)\,3}{4.6.8\ldots 2n\,(2n+1)}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots\frac{1}{(2n-1)^2}\right)\frac{\Delta^{n-1}\,U_r^{2n-2}}{2^{2n-2}Q^{(n-1)r}} \mp \ldots\right],$$

et, à la limite de convergence

$$(120)\quad \text{Log}^3\,(1+\sqrt{2}) = 1 - \frac{3.3}{4.5}\left(1+\frac{1}{3^2}\right) + \frac{3.5.3}{4.6.7}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\right) - \ldots.$$

Si l'on développe, par la formule de LAGRANGE, l'une des racines a^r ou b^r de l'équation

$$z^2 - zV_r + Q^r = 0,$$

on trouve

$$(121)\quad \begin{cases} b^r = \dfrac{Q^r}{V_r} + \dfrac{Q^{2r}}{V_r^3} + \dfrac{4}{2}\,\dfrac{Q^{3r}}{V_r^5} + \dfrac{5.6}{2.3}\,\dfrac{Q^{4r}}{V_r^7} + \ldots\ldots, \\ \text{Log}\,b^r = \text{Log}\,\dfrac{Q^r}{V_r} + \dfrac{Q^r}{V_r^2} + \dfrac{3}{2}\,\dfrac{Q^{2r}}{V_r^4} + \dfrac{5.4}{2.3}\,\dfrac{Q^{3r}}{V_r^6} + \ldots, \\ \dfrac{1}{3}\,b^{2r} = \dfrac{Q^{2r}}{2V_r^2} + \dfrac{Q^{3r}}{V_r^4} + \dfrac{5}{2}\,\dfrac{Q^{4r}}{V_r^6} + \dfrac{7.6}{2.3}\,\dfrac{Q^{5r}}{V_r^8} + \ldots\ldots \end{cases}$$

Si l'on fait encore, par la formule de LAGRANGE, le développement de y^{-n} suivant les puissances de z, en désignant par y l'une des racines de l'équation

$$y = 2 + \frac{z}{y},$$

on obtient

$$\left(\frac{2}{1+\sqrt{1+z}}\right)^n = 1 - \frac{n}{1}\frac{z}{4} + \frac{n\,(n+3)}{1.2}\left(\frac{z}{4}\right)^2 - \frac{n\,(n+4)\,(n+5)}{1.2.3}\left(\frac{z}{4}\right)^3 + \frac{n\,(n+5)\,(n+6)\,(n+7)}{1.2.3.4}\left(\frac{z}{4}\right)^4 - \ldots,$$

et, en posant

$$\frac{z}{4} = -\frac{Q^r}{V_r^2},$$

on a

$$(122)\qquad \frac{V_{nr}a^{nr}}{Q^{nr}} = 1 + \frac{n}{1}\frac{Q^r}{V_r^2} + \frac{n\,(n+3)}{1.2}\frac{Q^{2r}}{V_r^4} + \frac{n\,(n+4)\,(n+5)}{1.2.3}\frac{Q^{3r}}{V_r^6} + \ldots;$$

cette série est convergente pour $\frac{Q^r}{V_r^2} < 1$; elle contient la généralisation de la formule (84).

On a encore

$$b^r = \frac{V_r - \sqrt{V_r^2 - 4Q^r}}{2},$$

et, en développant le radical par la formule du binôme,

$$(123)\qquad b^r = \frac{1}{2}\frac{2Q^r}{V_r} + \frac{1}{2.4}\frac{2^3Q^{2r}}{V_r^3} + \frac{1.3}{2.4.6}\frac{2^5Q^{3r}}{V_r^5} + \ldots,$$

puis, à la limite de convergence,

$$(124)\qquad \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2.4} + \frac{1.3}{2.4.6} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} + \ldots$$

En appliquant la formule de BURMANN au développement de z suivant les puissances de $\frac{2z}{1+z^2}$, on obtiendrait, pour tout module de z inférieur à l'unité, et faisant ensuite $z = \frac{b^r}{a^r}$, la formule (121) donnée ci-dessus.

SECTION XIX.

Sur le calcul rapide des fractions continues périodiques.

On perfectionne, d'une manière notable, le calcul des réduites des fractions continues périodiques au moyen des formules suivantes. M. CATALAN a donné les relations :

$$\frac{z}{1-z^2}+\frac{z^2}{1-z^4}=\frac{z+z^2+z^3}{1-z^4},$$

$$\frac{z}{1-z^2}+\frac{z^2}{1-z^4}+\frac{z^4}{1-z^8}=\frac{z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6+z^7}{1-z^8},$$

$$\frac{z}{1-z^2}+\frac{z^2}{1-z^4}+\frac{z^4}{1-z^8}+\frac{z^8}{1-z^{16}}=\frac{z+z^2+\ldots\ldots+z^{14}+z^{15}}{1-z^{16}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

on a, plus généralement,

$$\frac{z}{1-z^2}+\frac{z^2}{1-z^4}+\ldots+\frac{z^{2^{n-1}}}{1-z^{2^n}}=\frac{1}{1-z}\cdot\frac{z-z^{2^n}}{1-z^{2^n}};$$

par conséquent, si l'on fait $z=\frac{b^r}{a^r}$, on obtient la formule

$$(125)\qquad \frac{Q^r}{U_{2r}}+\frac{Q^{2r}}{U_{4r}}+\ldots\ldots+\frac{Q^{2^{n-1}.r}}{U_{2^n.r}}=\frac{Q^r\,U_{(2^n-1)r}}{U_r\,U_{2^n.r}}.$$

Lorsque n augmente indéfiniment, on a, pour les séries de première et de seconde espèce,

$$(126)\qquad \frac{b^r}{U_r}=\frac{Q^r}{U_{2r}}+\frac{Q^{2r}}{U_{4r}}+\frac{Q^{4r}}{U_{8r}}+\ldots\ldots$$

Par exemple, dans la série de FIBONACCI, pour $r=1$,

$$(127)\qquad \frac{1-\sqrt{5}}{2}=-\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3.7}+\frac{1}{3.7.47}+\frac{1}{3.7.47.2207}+\ldots;$$

chacun des nouveaux facteurs des dénominateurs est égal au carré du précédent, diminué de deux unités ; de même, dans la série de PELL,

$$(128)\qquad 1-\sqrt{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2.3}+\frac{1}{2^3.3.17}+\frac{1}{2^4.3.17.577}+\ldots;$$

chacun des nouveaux facteurs des dénominateurs est égal, par les formules de duplication, au double du carré du précédent, diminué de l'unité.

Ces développements sont très-rapidement convergents; c'est, en quelque sorte, la combinaison du calcul logarithmique et du calcul par les fractions continues. Ainsi le dénominateur de la trentième-deuxième fraction de la formule (127), est à peu près égal à

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2^{32}},$$

et contient *deux-cent millions de chiffres*, environ; pour écrire le dénominateur de la soixante-quatrième fraction de la formule (128), il faudrait plus de *deux-cent millions de siècles.*

Nous avons d'ailleurs démontré (Section XI), que les différents facteurs des dénominateurs sont premiers entre eux deux à deux, et contiennent, par conséquent, des facteurs premiers tous différents; il en résulte que dans la somme des n premiers termes de ces séries, il n'y aura pas lieu de réduire cette somme à une plus simple expression. Nous montrerons, de plus, que tous ces facteurs, premiers et différents, appartiennent à des formes, linéaires et quadratiques, déterminées.

On a, plus généralement, l'identité

$$(129) \qquad \frac{z - z^q}{(1-z)(1-z^q)} + \frac{z^q - z^{pq}}{(1-z^q)(1-z^{pq})} = \frac{z - z^{pq}}{(1-z)(1-z^{pq})};$$

si l'on remplace q par p^n, on a donc

$$(130) \qquad \frac{z - z^{p^n}}{(1-z)(1-z^{p^n})} + \frac{z^{p^n} - z^{p^{n+1}}}{(1-z^{p^n})(1-z^{p^{n+1}})} = \frac{z - z^{p^{n+1}}}{(1-z)(1-z^{p^{n+1}})}.$$

Si l'on fait successivement n égal à 1, 2, 3, ... n, et si l'on ajoute les égalités obtenues, on a

$$(131) \qquad \frac{z - z^p}{(1-z)(1-z^p)} + \frac{z^p - z^{p^2}}{(1-z^p)(1-z^{p^2})} + \frac{z^{p^2} - z^{p^3}}{(1-z^{p^2})(1-z^{p^3})} + \dots$$
$$+ \frac{z^{p^n} - z^{p^{n+1}}}{(1-z^{p^n})(1-z^{p^{n+1}})} = \frac{z - z^{p^{n+1}}}{(1-z)(1-z^{p^{n+1}})}.$$

Faisons maintenant $z = \frac{b^r}{a^r}$, nous obtenons la formule

$$(132) \quad \frac{Q^r U_{(p-1)r}}{U_r U_{pr}} + \frac{Q^{pr} U_{(p-1)pr}}{U_{pr} U_{p^2 r}} + \frac{Q^{p^2 r} U_{(p-1)p^2 r}}{U_{p^2 r} U_{p^3 r}} + \dots + \frac{Q^{p^n r} U_{(p-1)p^n r}}{U_{p^n r} U_{p^{n+1} r}} + \frac{Q^r U_{(p^{n+1}-1)r}}{U_r U_{p^{n+1} r}}.$$

On calculera d'ailleurs les numérateurs et les dénominateurs de ces fractions, au moyen des formules de multiplication des fonctions numériques que nous avons données. Si p désigne un nombre impair, on obtient une formule analogue en changeant U en V. On peut encore appliquer ces formules aux fonctions circulaires.

Nous donnerons plus tard les formules analogues que l'on déduit de la théorie des fonctions elliptiques, et, en particulier, les sommes des inverses des termes U_n et de leurs puissances semblables.

SECTION XX.

Des relations des fonctions U_n et V_n avec la théorie de l'équation binôme.

On sait, par la théorie de l'équation binôme, exposée dans la dernière section des *Disquisitiones Arithmeticæ*, que si p désigne un nombre premier impair, le quotient

$$4\,\frac{z^p - 1}{z - 1} = 4\,(z^{p-1} + z^{p-2} + z^{p-3} + \ldots + z^2 + z + 1)$$

peut être écrit sous la forme

$$4\,\frac{z^p - 1}{z - 1} = Y^2 \pm pZ^2,$$

dans laquelle Y et Z sont des polynomes en z à coefficients entiers; on prend le signe $+$ lorsque p désigne un nombre premier de la forme $4q + 3$, et le signe $-$, lorsque p désigne un nombre premier de la forme $4q + 1$. Si l'on fait dans cette formule $z = \sqrt{\frac{a^r}{b^r}}$, on en déduit successivement pour $p = 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots$, les résultats suivants:

$$(133)\quad \begin{cases} 4\,\frac{U_{3r}}{U_r} = \Delta U_r^2 + 3Q^r, \\ 4\,\frac{U_{5r}}{U_r} = [2V_{2r} + Q^r]^2 - 5Q^{2r}, \\ 4\,\frac{U_{7r}}{U_r} = \Delta\,[2U_{3r} + Q^r U_r]^2 + 7Q^{2r} V_r^2, \\ 4\,\frac{U_{11r}}{U_r} = \Delta\,[2U_{5r} + Q^r U_{3r} - 2Q^{2r} U_r]^2 + 11Q^{2r} V_{3r}^2, \\ 4\,\frac{U_{13r}}{U_r} = [2V_{6r} + Q^r V_{4r} + 4Q^{2r} V_{2r} - Q^{3r}]^2 - 13Q^{2r}\,[V_{4r} + Q^{2r}]^2, \\ 4\,\frac{U_{17r}}{U_r} = [2V_{8r} + Q^r V_{6r} + 5Q^{2r} V_{4r} + 7Q^{3r} V_{2r} + 4Q^{4r}]^2 \\ \qquad\qquad - 17Q^{2r}\,[V_{6r} + Q^r V_{4r} + Q^{2r} V_{2r} + 2Q^{3r}]^2, \\ 4\,\frac{U_{19r}}{U_r} = \Delta\,[2U_{9r} + Q^r U_{7r} - 4Q^{2r} U_{5r} + 3Q^{3r} U_{3r} + 5Q^{4r} U_r]^2 \\ \qquad\qquad + 19Q^{2r}\,[V_{9r} + Q^r V_{7r} - Q^{3r} V_{3r} - 2Q^{4r} V_r]^2, \\ 4\,\frac{U_{23r}}{U_r} = \Delta\,[2U_{11r} + Q^r U_{9r} - 5Q^{2r} U_{7r} - 8Q^{3r} U_{5r} - 7Q^{4r} U_{3r} - 4Q^{5r} U_r]^2 \\ \qquad\qquad + 23Q^{2r}\,[V_{9r} + Q^r V_{7r} - Q^{3r} V_{3r} - 2Q^{4r} V_r]^2, \\ 4\,\frac{U_{29r}}{U_r} = [2V_{14r} + Q^r V_{12r} + 8Q^{2r} V_{10r} - 3Q^{3r} V_{8r} + Q^{4r} V_{6r} - 2Q^{5r} V_{4r} + 3Q^{6r} V_{2r} \\ \qquad\qquad + 9Q^{7r}]^2 - 29Q^{2r}\,[V_{12r} + Q^{2r} V_{8r} - Q^{3r} V_{6r} + Q^{5r}{}_{2r}V + Q^{6r}]^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

On a, par conséquent, la proposition suivante :

THÉORÈME : *Si p désigne un nombre premier de la forme $4q+1$, le quotient $4\frac{U_{pr}}{U_r}$ peut se mettre sous la forme $Y^2 - pZ^2$, et si p désigne un nombre premier de la forme $4q+3$, le quotient $4\frac{U_{pr}}{U_r}$ peut se mettre sont la forme $\Delta Y^2 + pZ^2$.*

D'ailleurs, en changeant z en $-z$, on obtiendra un résultat semblable pour le quotient $4\frac{V_{pr}}{V_r}$. On généralise ainsi un théorème donné par LEGENDRE, et dont la démonstration est, de cette façon, rendue plus simple. Il résulte encore des formules (133) une autre conséquence importante. En effet, nous avons laissé jusqu'à présent Δ arbitraire; mais, s'il s'agit des fonctions de troisième espèce, nous pouvons supposer $-\Delta$ égal au produit d'un carré par un nombre premier p de la forme $4q+3$;* alors, on voit que les quotients $4\frac{U_{pr}}{pU_r}$ et $4\frac{V_{pr}}{pV_r}$ sont égaux à une différence de carrés, et, par suite, décomposables en un produit de deux facteurs. On a donc cette proposition :

THÉORÈME : *Si $-\Delta$ est égal au produit d'un nombre premier p de la forme $4q+3$ par un carré, les quotients $4\frac{U_{pr}}{pU_r}$ et $4\frac{V_{pr}}{pV_r}$ sont, quelle que soit la valeur entière de r, décomposables en un produit de deux facteurs entiers.*

Si nous considérons l'équation fondamentale

$$x^2 = x - 2$$

dans laquelle $\Delta = -7$, nous obtenons, par exemple,

$$U_{11} = +23, \quad U_{77} = -26\ 4721893121;$$

et, par suite,

$$U_{77} = -7 \times 23 \times 11087 \times 148303.$$

Nous démontrerons plus loin que les diviseurs premiers de $\frac{4U_{77}}{7U_{11}}$ appartiennent aux formes linéaires $77q \pm 1$; par conséquent, le nombre 11087 est premier, sans qu'il soit nécessaire d'essayer ces diviseurs, puisque le premier des nombres de la forme linéaire indiquée, est supérieur à la racine carrée de 11087; pour le facteur 148303 il n'y a que le diviseur 307 à essayer. On a encore, dans la même série

$$U_{13} = -1, \quad U_{91} = -384\ 17168\ 38057,$$

---

* En effet, il suffit de déterminer Q par la relation $4Q - P^2 = pK^2$.

et, par suite,

$$U_{91} = -7 \times 712711 \times 770041.$$

Ces deux derniers facteurs sont premiers; il n'y a que deux diviseurs à essayer. On comprend ainsi comment il est possible d'appliquer le théorème précédent, à la recherche directe de très-grands nombres premiers, par la considération des séries de troisième espèce.

SECTION XXI.

Sur les congruences du Triangle Arithmétique de PASCAL, *et sur une généralisation du théorème de* FERMAT.

En désignant par C_m^n le nombre des combinaisons de m objets pris n à n, on a les deux formules fondamentales

$$C_m^n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}$$

$$C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1};$$

par conséquent, lorsque p est premier, on a pour n entier compris entre 0 et p, la congruence

(134) $$C_p^n \equiv 0, \quad (\text{Mod. } p);$$

pour n compris entre 0 et $p-1$,

(135) $$C_{p-1}^n \equiv (-1)^n, \quad (\text{Mod. } p);$$

pour n compris entre 1 et p

(136) $$C_{p+1}^n \equiv 0, \quad (\text{Mod. } p).$$

En d'autres termes, dans le triangle arithmétique de PASCAL, tous les nombres de la $p^{ième}$ ligne sont, pour p premier, divisibles par p, à l'exception des coefficients extrêmes égaux à l'unité; les coefficients de la $(p-1)^{ième}$ ligne donnent alternativement pour résidus $+1$ et -1; ceux de la $(p+1)^{ième}$ ligne sont divisibles par p, en exceptant les quatre coefficients extrêmes, égaux à l'unité.

Si l'on continue la formation du triangle arithmétique, en ne conservant que les résidus suivant le module p, on reforme deux fois le triangle arithmétique des (p — 1) premières lignes; puis, à partir de la $(2p)^{ième}$ ligne, on le reforme trois fois; mais les résidus du triangle intermédiaire sont multipliés par 2; à partir de la $(3p)^{ième}$ ligne, le triangle des résidus est reproduit quatre

fois, mais les nombres de ces triangles sont respectivement multipliés par les coefficients 1, 3, 3, 1 de la troisième puissance du binôme, et ainsi de suite.

On a donc, en général,

$$C_m^n \equiv C_{m_1}^{n_1} \times C_\mu^\nu\,, \quad (\text{Mod. } p)\,,$$

m_1 et n_1 désignant les entiers de $\frac{m}{p}$ et de $\frac{n}{p}$, et μ et ν les résidus de m et de n. On a, de même

$$C_{m_1}^{n_1} \equiv C_{m_2}^{n_2} \times C_{\mu_1}^{\nu_1}\,, \quad (\text{Mod. } p)\,,$$

et, par suite,

(137) $$C_m^n \equiv C_{\mu_1}^{\nu_1} \times C_{\mu_2}^{\nu_2} \times C_{\mu_3}^{\nu_3} \times \ldots\,, \quad (\text{Mod. } p)\,,$$

$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ désignant les résidus de m et des entiers de $\frac{m}{p}, \frac{m}{p^2}, \frac{m}{p^3}, \ldots$, et de même pour $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$.

Par conséquent, si l'on veut trouver le reste de la division de C_m^n par un nombre premier, il suffit d'appliquer la formule précédente, jusqu'à ce qu'on ait ramené les deux indices de C, à des nombres inférieurs à p.

Nous venons de voir que les coefficients de la puissance p du binôme sont entiers et divisibles par p, lorsque p désigne un nombre premier, en exceptant toutefois les coefficients des puissances $p^{\text{ièmes}}$. En désignant par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ \lambda$, des entiers quelconques, en nombre n, on a donc

$$[\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda]^p - [\alpha^p + \beta^p + \gamma^p + \ldots + \lambda^p] \equiv 0, \quad (\text{Mod. } p),$$

et, pour $\alpha = \beta = \gamma = \ldots = \lambda = 1$, on obtient

$$n^p - n \equiv 0, \quad (\text{Mod. } p)\,.$$

C'est dans cette congruence que consiste le théorème de FERMAT, que l'on peut généraliser de la manière suivante, différente de celle que l'on doit à EULER. Si $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$, désignent les puissances $q^{\text{ièmes}}$ des racines d'une équation à coefficients entiers, et S_q leur somme, le premier membre de la congruence précédente représente le produit par p d'une fonction symétrique, entière et à coefficients entiers, des racines, et, par conséquent, des coefficients de l'équation proposée. On a donc

$$S_{pq} \equiv S_q^p\,, \quad (\text{Mod. } p)\,,$$

et, par l'application du théorème de FERMAT,

(138) $$S_{pq} \equiv S_q\,, \quad (\text{Mod. } p)\,.$$

L'étude des diviseurs premiers de la fonction numérique S_n et de quelques autres analogues est trés-importante; on a, en particulier, pour $n = 1$ et $S_1 = 0$, comme dans l'équation

$$x^3 = x + 1\,,$$

la congruence

$$S_p \equiv 0\,, \quad (\text{Mod. } p)\,;$$

on en déduit inversement que *si, dans le cas de $S_1 = 0$, on a S_n divisible par p, pour $n = p$, et non auparavant, le nombre p est un nombre premier.* En effet, supposons p égal, par exemple, au produit de deux nombres premiers g et h. On a

$$S_{gh} \equiv S_h\,, \quad (\text{Mod. } g)$$
$$S_{gh} \equiv S_g\,, \quad (\text{Mod. } h)\,;$$

par conséquent, si l'on a trouvé

$$S_{gh} \equiv 0\,, \quad (\text{Mod. } gh)\,,$$

on aura aussi

$$S_g \equiv 0\,, \quad (\text{Mod. } h)\,,$$
$$S_h \equiv 0\,, \quad (\text{Mod. } g)\,,$$

et, par le théorème démontré,

$$S_g \equiv S_h \equiv 0\,, \quad (\text{Mod. } gh)\,.$$

Ainsi S_{gh} ne serait pas le premier des nombres S_n divisible par gh.

On peut obtenir, de cette façon, un grand nombre de théorèmes servant, comme celui de WILSON, à vérifier les nombres premiers. Nous laisserons de côté, pour l'instant, les développements curieux et nouveaux que nous avons ainsi trouvés, pour ne considérer que ceux que l'on tire des fonctions numériques simplement périodiques.

SECTION XXII.

Sur la théorie des nombres premiers dans leurs rapports avec les progressions arithmétiques.

La doctrine des nombres premiers a été ébauchée par EUCLIDE et ERATOSTHÈNE. On doit à EUCLIDE la théorie des diviseurs et des multiples communs de deux ou plusieurs nombres donnés, la représentation des nombres composés à l'aide de leurs facteurs, et la démonstration de l'infinité des nombres premiers, que l'on peut étendre facilement à la preuve de l'infinité des nombres premiers appartenant aux formes linéaires $4x + 3$ et $6x + 5$. Nous donnerons, dans la Section XXIV, une démonstration élémentaire concernant l'infinité des nombres premiers de la forme $mx + 1$, quelle que soit la valeur de m. On sait d'ailleurs que, par l'emploi des séries infinies, LEJEUNE-DIRICHLET est parvenu à démontrer l'infinité des nombres premiers de la

forme linéaire $a + bx$, dans laquelle a et b sont deux entiers quelconques premiers entre eux.*

On doit à ERATOSTHÈNE une méthode ingénieuse connue sous le nom de *Crible Arithmétique*, qui conduit à la formation de la table des nombres premiers et des nombres composés; on possède, depuis les travaux de CHERNAC, de BURCKHARDT et de DASE, la table des neuf premiers millions; LEBESGUE a indiqué un procédé qui permet de diminuer le volume de ces tables.† D'autre part, M. GLAISHER a évalué la multitude des nombres premiers compris dans ces tables, afin de comparer les formules théoriques données par GAUSS, LEGENDRE, TCHEBYCHEF et HEARGRAVE, pour exprimer la quantité des nombres premiers inférieurs à un entier donné. M. GLAISHER, en comptant 1 et 2 comme premiers, a trouvé les valeurs suivantes: ‡

pour le	premier	million,	78499	nombres premiers,
"	deuxième	"	, 70433	" ,
"	troisième	"	, 67885	" ,
"	septième	"	, 63799	" ,
"	huitième	"	, 63158	" ,
"	neuvième	"	, 62760	" .

Les principes d'EUCLIDE et d'ERATOSTHÈNE conduisent ainsi à une première méthode de vérification des nombres premiers, non compris dans les Tables, et de décomposition des nombres très-grands en leurs facteurs premiers, par l'essai successif de la division d'un nombre *fixe*, le nombre donné, par tous les nombres premiers inférieurs à sa racine carrée. Mais c'est là une méthode indirecte qui devient absolument impraticable, dès que le nombre donné a dix chiffres.

En suivant cette voie, M. DORMOY est arrivé par des considérations ingénieuses, déduites de la théorie de certains nombres, qu'il a appelés *objectifs* (et dans lesquels on retrouve sous le nom *d'objectifs de l'unité* les différents termes de la série de FIBONACCI), à l'établissement d'une formule générale de nombres premiers. Malheureusement, même pour des limites peu élevées, cette formule contient des coefficients considérables qui en rendent l'application illusoire. ||

* *Abhandlungen der Berliner Akademie*, Berlin, 1837.

† CHERNAC.—*Cribrum Arithmeticum* de 1 à 1020000. Deventer, 1811.
BURCKHARDT.—*Tables des diviseurs* jusqu'à 3036000. Paris, 1814–1817.
DASE.—*Factoren Tafeln* de 6000000 à 9000000. Vienne, 1862–1865.
LEBESGUE.—*Tables diverses pour la décomposition des nombres en leurs facteurs premiers.* Paris, 1864.

‡ *Preliminary accounts of the results of an enumeration of the primes in Dase's and Burckhardt's tables.* Cambridge, 1876–1877.

|| E. DORMOY.—*Formule générale des nombres premiers et Théorie des Objectifs.* Paris, 1867.

Les nombres premiers sont distribués fort irrégulièrement dans la suite des nombres entiers; c'est qu'en effet, d'une part, on voit que si μ désigne le plus petit multiple commun des nombres 2, 3, ... m, les nombres

$$\mu+2,\ \mu+3,\ \ldots.,\ \mu+m,$$

sont respectivement divisibles par

$$2,\ 3,\ \ldots.\ m.$$

Par conséquent, on peut toujours trouver m nombres consécutifs et composés, quelle que soit la valeur de m; mais, d'autre part, l'examen des tables permet de constater l'existence de deux nombres impairs consécutifs, très-grands, et premiers. M. GLAISHER a donné la liste des groupes, renfermés dans les tables, qui contiennent au moins cinquante nombres consécutifs et composés; ainsi, par exemple, les suivants:

111	nombres composés	et consécutifs	entre	370261	et	370373,
113	"	"	"	492113	et	492227,
131	"	"	"	1357201	et	1357333,
131	"	"	"	1561919	et	1562051,
147	"	"	"	2010733	et	2010881,

(*London Mathematical Society*, 10 Mai, 1877).

On sait encore démontrer qu'une fonction rationnelle de n

$$p=\phi\,(n),$$

ne peut continuellement donner des nombres premiers, puisque l'on a, quelque soit le nombre entier k,

$$\phi\,(n+kp)\equiv\phi\,(n),\quad (\text{Mod.}\,p),$$

c'est-à-dire que $\phi\,(n)$ est une fonction numérique périodique d'amplitude p. Il est donc fort difficile d'arriver à la loi de distribution des nombres premiers dans la série ordinaire des nombres entiers.

Cependant, il paraît naturel d'étudier les nombres premiers d'après leur loi de formation. L'étude approfondie de la méthode d'ERATOSTHÈNE a conduit le prince A. DE POLIGNAC, à d'intéressantes proprietés des *suites diatomiques*;* à la même époque, M. TCHEBYCHEF, arrivait par des considérations peu différentes, à la démonstration de ce théorème remarquable: *Pour* $a>3$, *il y a au moins un nombre premier compris entre* a *et* $2a-2$.† On déduit immédiatement de là que le produit

$$1\,.\,2\,.\,3\ \ldots.\ n$$

* *Recherches nouvelles sur les nombres premiers;* par M. A. DE POLIGNAC; Paris, 1851. Il est curieux de constater que, sous le nom de *suite médiane*, on retrouve dans les séries diatomiques, les différents termes de la série de FERMAT.

† *Journal de Liouville*, t. XVII.

ne saurait être une puissance, ni un produit de puissances, ainsi que l'a montré M. LIOUVILLE. (*Journal de Liouville*, 2[e] série, t. II). En résumé, ces recherches sont basées sur la *considération des progressions arithmétiques.*

SECTION XXIII.

Sur la théorie des nombres premiers dans leurs rapports avec les progressions géométriques.

On doit à FERMAT des recherches profondes sur la théorie des nombres premiers, et basées sur la considération des *progressions géométriques.* C'est cette idée, distincte de la précédente, qui a donné naissance à la *théorie des résidus potentiels*, et, plus particulièrement, à celle des *résidus quadratiques.* De cette façon, on simplifie la vérification des nombres premiers très-grands, et diviseurs de la forme $a^n - 1$, ou plus généralement, de la forme $a^n - b^n$, pour a et b entiers, ainsi que la décomposition des nombres de cette forme en facteurs premiers. FERMAT avait remarqué la forme linéaire $nx + 1$ des diviseurs, et donné lui-même la décomposition de plusieurs termes de la série $2^n - 1$, et ainsi, celle du nombre $2^{37} - 1$, qu'il a trouvé divisible par 223 [*Lettre de* FERMAT, du 12 Octobre 1640].

M. GENOCCHI a remis dernièrement en lumière un curieux passage des œuvres du P. MERSENNE. Mais, pour en mieux saisir l'importance, nous rappellerons en quelques mots la théorie des *nombres parfaits.* On dit qu'un nombre est *parfait*, lorsque il est égal à la somme de ses parties *aliquotes*, c'est-à-dire de tous ses diviseurs, excepté lui-même. En nous bornant au cas des nombres parfaits pairs, et en désignant par $b, c, \ldots.$ des nombres premiers différents, par $n = a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots$, le nombre supposé parfait, on doit avoir

$$2^{\alpha+1} b^\beta c^\gamma \ldots = (1 + 2 + \ldots + 2^\alpha)(1 + b + b^2 + \ldots + b^\beta)(1 + c + c^2 + \ldots + c^\gamma) \ldots,$$

ou bien

$$b^\beta c^\gamma \ldots + \frac{b^\beta c^\gamma \ldots}{2^{\alpha+1} - 1} = (1 + b + b^2 + \ldots + b^\beta)(1 + c + c^2 + \ldots + c^\gamma) \ldots.;$$

le second terme du premier membre est donc entier, et devient, après la division, de la forme $b^{\beta'} c^{\gamma'} \ldots$; mais d'autre part, le second membre qui contient un nombre de termes

$$\mu = (\beta + 1)(\gamma + 1) \ldots.,$$

doit se réduire aux deux termes du premier membre; par suite $\mu = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = \delta = \ldots. = 0$; donc $n = 2^\alpha b$, et b est premier. Ainsi, les

nombres parfaits pairs appartiennent à la forme $n = 2^a b$, dans laquelle b doit être premier; on a d'ailleurs aisément, avec cette condition

$$b = 2^{a+1} - 1 .$$

En résumé, il n'y a pas d'autres nombres parfaits pairs que les nombres

$$2^a (2^{a+1} - 1) ,$$

dans lesquels le second facteur est un nombre premier. Cette règle était connue d'EUCLIDE; mais ce géométre ne savait pas démontrer que l'on obtenait ainsi tous les nombres parfaits pairs, sans exception.

Voici maintenant le passage des Œuvres de MERSENNE:

"XIX. Ad ea quæ de Numeris ad calcem prop. 20. de Ballist. & puncto 14 Præfationis ad Hydraul. dicta sunt, adde inuentam artem quâ numeri, quotquot volueris, reperiantur qui cum suis partibus aliquotis in vnicam summam redactis, non solum duplam rationem habeant, (quales sunt 120, minimus omnium, 672, 523776, 1476304896, & 459818240, qui ductus in 3, numerum efficit 1379454720, cuius partes aliquotæ triplæ sunt, quales etiam sequentes 30240, 32760, 23569920, & alij infiniti, de quibus videatur Harmonia nostra, in qua 14182439040, & alij suarum partium aliquotarum subquadrupli) sed etiam sint in ratione data cum suis partibus aliquotis.

"Sunt etiam alij numeri, quos vocant amicabiles, quod habeant partes aliquotas à quibus mutuò reficiantur, quales sunt omnium minimi 220, & 284; huius enim aliquotæ partes illum efficiunt, vicéque versa partes illius aliquotæ hunc perfectè restituunt. Quales & 18416 & 17296; nec non 9437036, & 4363584 reperies, aliosque innumeros.

"Vbi fuerit operæ pretium aduertere XXVIII numeros à Petro Bungo pro perfectis exhibitos, capite XXVIII, libri de Numeris, non esse omnes Perfectos, quippe 20 sunt imperfecti, adeo vt solos octo perfectos habeat videlicet 6. 28. 496. 8128 33550336. 8589869056. 137438691328, & 2305843008139952128; qui sunt è regione tabulae Bungi, 1, 2, 3, 4, 8, 10, 12, & 29: quique soli perfecti sunt, vt qui Bungum habuerint, errori medicinam faciant.

"Porrò numeri perfecti adeo rari sunt, vt vndecim dumtaxat potuerint hactenus inueniri: hoc est, alii tres à Bougianis differentes: neque enim vllus est alius perfectus ab illis octo, nisi superes exponentem numerum 62, progressionis duplæ ab 1 incipientis. Nonus enim perfectus est potestas exponentis 68 minus 1. Decimus, potestas exponentis 128, minus 1. Vndecimus denique, potestas 258, minus 1, hoc est potestas 257, vnitate decurtata, multiplicata per potestatem 256.

"Qui vndecim alios repererit, nouerit se analysim omnem, quæ fuerit hactenus, superasse: memineritque interea nullum esse perfectum à 17000 potestate ad 32000; & nullum potestatum interuallum tantum assignari posse, quin detur illud absque perfectis. Verbi gratia, si fuerit exponens 1050000, nullus erit numerus progressionis duplæ vsque ad 2090000, qui perfectis numeris serviat, hoc est qui minor vnitate, primus existat.

"Vnde clarum est quàm rari sint perfecti numeri, & quàm meritò viris perfectis comparentur; esseque vnam ex maximis totius Matheseos difficultatibus, præscriptam numerorum perfectorum multitudinum exhibere; quemadmodum & agnoscere num dati numeri 15, aut 20 caracteribus constantes, sint primi necne, cùm nequidem sæculum integrum huic examini, quocumque modo hactenus cognito, sufficiat." *

---

* F. MARINI MERSENNI MINIMI, COGITATA PHYSICO-MATHEMATICA. *In quibus tam naturæ quàm artis effectus admirandi certissimis demonstrationibus explicantur.* Paris, 1644. f° 11. de la Préface.

D'après ce passage, le tableau des nombres parfaits pairs serait le suivant:

Premier nombre parfait	$2\,(2^2-1)$,	Deuxième nombre parfait	$2^2\,(2^3-1)$,
Troisième "	$2^4\,(2^5-1)$,	Quatrième "	$2^6\,(2^7-1)$,
Cinquième "	$2^{12}\,(2^{13}-1)$,	Sixième "	$2^{16}\,(2^{17}-1)$,
Septième "	$2^{18}\,(2^{19}-1)$,	Huitième "	$2^{30}\,(2^{31}-1)$,
Neuvième "	$2^{66}\,(2^{67}-1)$,	Dixième "	$2^{126}\,(2^{127}-1)$,
Onzième "	$2^{256}\,(2^{257}-1)$,	. . . .	

Ce passage est d'ailleurs rapporté dans un mémoire de C. N. WINSHEIM, inésré dans les *Novi Commentarii Academiæ Petropolitanæ, ad annum* MDCCXLIX (tom. II, pag. 78), et précédé des réflexions suivantes:

"Suspicio enim adesse videtur, utrum numerus nonus, perfecti locum tueri possit, quoniam ab acutissimo Mersenno exclusus reperitur, qui ejus in locum potestatem binarii $(2^{67}-1)\,2^{66}$ sive numerum decimum nonum perfectum Hanschii 1|47573|95258|96764|12927, substituit: digna certe mihi visa sunt verba viri perspicacissimi, ut hic integra exhibeantur."

Ainsi MERSENNE aurait démontré que, pour n compris entre 31 et 257, il n'existe pas de nombres premiers de la forme 2^n-1, en exceptant ceux pour lesquels n a pour valeur l'un des nombres

$$31,\ 67,\ 127,\ 257.$$

La preuve de non-décomposition du premier de ces nombres, $2^{31}-1$, n'a été donnée que plus tard, par EULER. En outre, M. F. LANDRY, au moyen d'une méthode inédite, et probablement fort simple, est parvenu à la décomposition de certains grands nombres en leurs facteurs premiers; il a, en effet, donné la décomposition des nombres

$$2^{41}-1,\quad 2^{43}-1,\quad 2^{47}-1,\quad 2^{53}-1,\quad 2^{59}-1,$$

en leurs facteurs premiers. De plus, on trouvé que $2^{73}-1$, $2^{79}-1$ et $2^{113}-1$, sont respectivement divisibles par 439, 2687 et 3391. Enfin, on a le théorème suivant:

THÉORÈME: *Si* $4q+3$ *et* $8q+7$ *sont des nombres premiers, le nombre* $2^{4q+3}-1$ *est divisible par* $8q+7$.

En effet, d'après le thoérème de FERMAT, on a

$$2^{8q+6}-1\equiv 0,\quad (\text{Mod. } 8q+7),$$

et, par suite l'un des deux facteurs $2^{4q+3}+1$ ou $2^{4q+3}-1$ du premier membre de la congruence est divisible par le module; mais, d'autre part, on sait que 2 est résidu quadratique de tous les nombres premiers de l'une des formes $8n+1$ et $8n+7$; par conséquent, on a

$$2^{4q+3}-1\equiv 0,\quad (\text{Mod. } 8q+7);$$

en consultant la table des nombres premiers, on en conclut que pour les valeurs de n successivement égales à

11, 23, 83, 131, 179, 191, 239, 251, 359, 419, 431, 443, 491,

les nombres $2^n - 1$ sont respectivement divisibles par les facteurs

23, 47, 167, 263, 359, 383, 479, 503, 719, 839, 863, 887, 983.

Il résulte de ces diverses considérations que Mersenne était en possession d'une méthode arithmétique qui ne nous est point parvenue. Cependant, il paraît naturel de penser que cette méthode ne devait pas s'éloigner des principes de Fermat, et par conséquent, ne pas différer essentiellement de celle que nous déduirerons, plus loin, de l'inversion du théorème de Fermat. Nous indiquons, en effet, comment il est possible d'arriver rapidement à l'étude du mode de composition des grands nombres dont il est parlé plus haut.

Nous donnons dans le tableau suivant, la décomposition des nombres U_n et V_n de la série de Fermat, pour toutes les valeurs de n jusqu'à 64. Parmi les grands nombres premiers de ce tableau, on remarquera

1°. Cinq nombres de dix chiffres

42782 55361	facteur de	$2^{40} + 1$,
88314 18697	"	$2^{41} + 1$,
29315 42417	"	$2^{44} + 1$,
18247 26041	"	$2^{59} + 1$,
45622 84561	"	$2^{60} + 1$;

2°. Deux nombres de onze chiffres

5 44109 72897	facteur de	$2^{56} + 1$,
7 71586 73929	"	$2^{63} + 1$;

3°. Un nombre de douze chiffres

16 57685 37521	facteur de	$2^{47} + 1$;

4°. Quatre nombres de treize chiffres

293 20310 07403	facteur de	$2^{43} + 1$,
443 26767 98593	"	$2^{49} - 1$,
436 39531 27297	"	$2^{49} + 1$,
320 34317 80337	"	$2^{59} - 1$;

5°. Un nombre de quatorze chiffres

$$2805\ 98107\ 62433 \quad \text{facteur de} \quad 2^{53}+1.$$

Il reste à déterminer la nature des trois nombres $2^{61}-1$, $\frac{1}{3}(2^{61}+1)$, et $2^{64}+1$. M. LANDRY pense que ces nombres sont premiers; mais, d'autre part, d'après MERSENNE, le premier de ces nombres serait composé; de plus, par la considération de calculs que j'ai effectués, et dont la théorie est indiquée plus loin, le dernier de ces nombres serait aussi composé. Il n'y a donc pas lieu de se prononcer pour le moment.

En dehors des décompositions renfermées dans le tableau, M. LANDRY a encore obtenu les diviseurs propres d'un certain nombre d'autres termes de cette série, à savoir

Pour $2^{65}+1$	4 09891 et 76 23851,		
$2^{69}+1$	16 87499 65921,		(premier),
$2^{75}-1$	1 00801 et 105 67201,		
$2^{75}+1$	113 38367 30401,		(premier),
$2^{105}+1$	6 64441 et 15 64921.		

De son côté, M. LE LASSEUR est parvenu aux mêmes résultats; mais, il a, en outre, indiqué l'identité

$$2^{4n+2}+1=(2^{2n+1}+2^{n+1}+1)(2^{2n+1}-2^{n+1}+1),$$

qui permet d'abréger les calculs. Cette identité, fort importante, sera généralisée ultérieurement.

TABLEAU DES FACTEURS PREMIERS DE LA SÉRIE RÉCURRENTE DE FERMAT.

d'après M. F. LANDRY.

U_n	Diviseurs de U_n		Valeurs de 2^n	V_n	Diviseurs de V_n
2^1-1	1	2^1	2	2^1+1	3
		2^2	4	2^2+1	5
2^3-1	7	2^3	8	2^3+1	3^2
		2^4	16	2^4+1	17
2^5-1	31	2^5	32	2^5+1	3.11
		2^6	64	2^6+1	5.13
2^7-1	127	2^7	128	2^7+1	3.43
		2^8	256	2^8+1	257
2^9-1	7.73	2^9	512	2^9+1	$3^3.19$
		2^{10}	1024	$2^{10}+1$	$5^2.41$
$2^{11}-1$	23.89	2^{11}	2048	$2^{11}+1$	3.683
		2^{12}	4096	$2^{12}+1$	17.241
$2^{13}-1$	8191	2^{13}	8192	$2^{13}+1$	3.2731
		2^{14}	16384	$2^{14}+1$	5.29.113
$2^{15}-1$	7.31.151	2^{15}	32768	$2^{15}+1$	$3^2.11.331$
		2^{16}	65536	$2^{16}+1$	65537
$2^{17}-1$	131071	2^{17}	131072	$2^{17}+1$	3.43691
		2^{18}	262144	$2^{18}+1$	5.13.37.109
$2^{19}-1$	524287	2^{19}	524288	$2^{19}+1$	3.174763
		2^{20}	1048576	$2^{20}+1$	17.61681
$2^{21}-1$	$7^2.127.337$	2^{21}	2097152	$2^{21}+1$	$3^2.43.5419$
		2^{22}	4194304	$2^{22}+1$	5.397.2113
$2^{23}-1$	47.178481	2^{23}	8388608	$2^{23}+1$	3.2796203
		2^{24}	16777216	$2^{24}+1$	97.257.673
$2^{25}-1$	31.601.1801	2^{25}	33554432	$2^{25}+1$	3.11.251.4051
		2^{26}	67108864	$2^{26}+1$	5.53.157.1613
$2^{27}-1$	7.73.262657	2^{27}	134217728	$2^{27}+1$	$3^4.19.87211$
		2^{28}	268435456	$2^{28}+1$	17.15790321
$2^{29}-1$	233.1103.2089	2^{29}	536870912	$2^{29}+1$	3.59.3033169
		2^{30}	1073741824	$2^{30}+1$	$5^2.13.41.61.1321$
$2^{31}-1$	2147483647	2^{31}	2147483648	$2^{31}+1$	3.715827883
		2^{32}	4294967296	$2^{32}+1$	641.6700417

TABLEAU DES FACTEURS PREMIERS DE LA SÉRIE RÉCURRENTE DE FERMAT.

(*Suite.*)

U_n	Diviseurs de U_n		Valeurs de 2^n	V_n	Diviseurs de V_n
$2^{33}-1$	7.23.89.599479	2^{33}	8589934592	$2^{33}+1$	3^2.67.683.20857
		2^{34}	17179869184	$2^{34}+1$	5.137.953.26317
$2^{35}-1$	31.71.127.122921	2^{35}	34359738368	$2^{35}+1$	3.11.43.281.86171
		2^{36}	68719476736	$2^{36}+1$	17.241.433.38737
$2^{37}-1$	223.616318177	2^{37}	137438953472	$2^{37}+1$	3.1777.25781083
		2^{38}	274877906944	$2^{38}+1$	5.229.457.525313
$2^{39}-1$	7.79.8191.121369	2^{39}	549755813888	$2^{39}+1$	3^2.2731.22366891
		2^{40}	1099511627776	$2^{40}+1$	257.4278255361
$2^{41}-1$	13367.164511353	2^{41}	2199023255552	$2^{41}+1$	3.83.8831418697
		2^{42}	4398046511104	$2^{42}+1$	5.13.29.113.1429.14449
$2^{43}-1$	431.9719.2099863	2^{43}	8796093022208	$2^{43}+1$	3.2932031007403
		2^{44}	17592186044416	$2^{44}+1$	17.353.2931542417
$2^{45}-1$	7.31.73.151.631.23311	2^{45}	35184372088832	$2^{45}+1$	3^3.11.19.331.18837001
		2^{46}	70368744177664	$2^{46}+1$	5.277.1013.1657.30269
$2^{47}-1$	2351.4513.13264529	2^{47}	140737488355328	$2^{47}+1$	3.283.165768537521
		2^{48}	281474976710656	$2^{48}+1$	193.65537.22253377
$2^{49}-1$	127.4432676798593	2^{49}	562949953421312	$2^{49}+1$	3.43.4363953127297
		2^{50}	1125899906842624	$2^{50}+1$	5^3.41.101.8101.268501
$2^{51}-1$	7.103.2143.11119.131071	2^{51}	2251799813685248	$2^{51}+1$	3^2.307.2857.6529.43691
		2^{52}	4503599627370496	$2^{52}+1$	17.858001.308761441
$2^{53}-1$	6361.69431.20394401	2^{53}	9007199254740992	$2^{53}+1$	3.107.28059810762433
		2^{54}	18014398509481984	$2^{54}+1$	5.13.37.109.246241.279073
$2^{55}-1$	23.31.89.881.3191.201961	2^{55}	36028797018963968	$2^{55}+1$	3.11^2.683.2971.48912491
		2^{56}	72057594037927936	$2^{56}+1$	257.5153.54410972897
$2^{57}-1$	7.32377.524287.1212847	2^{57}	144115188075855872	$2^{57}+1$	3^2.571.174763.160465489
		2^{58}	288230376151711744	$2^{58}+1$	5.107367629.536903681
$2^{59}-1$	179951.3203431780337	2^{59}	576460752303423488	$2^{59}+1$	3.2833.37171.1824726041
		2^{60}	1152921504606846976	$2^{60}+1$	17.241.61681.4562284561
$2^{61}-1$	. . . .	2^{61}	2305843009213693952	$2^{61}+1$	3. . . . .
		2^{62}	4611686018427387904	$2^{62}+1$	5.5581.8681.49477.384773
$2^{63}-1$	7^2.73.127.337.92737.649657	2^{63}	9223372036854775808	$2^{63}+1$	3^3.19.43.5419.77158673929
		2^{64}	18446744073709551616	$2^{64}+1$	. . . .

(Sera continué.)